Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Roland Potthast
aus
Soest/Westfalen

Göttingen 1994

D7
Referent: Prof. Dr. R. Kreß
Korreferent: Prof. Dr. R. Schaback
Tag der mündlichen Prüfung: 2.11.1994

"Jesus aber sprach zu ihnen: Ich bin das Brot des Lebens.
Wer zu mir kommt, den wird nicht hungern,
und wer an mich glaubt, den wird nimmermehr dürsten."

Evangelium des Johannes 6, 35

Einleitung

Randwertprobleme zu *partiellen Differentialgleichungen* stehen seit Beginn der modernen Naturwissenschaft im Zentrum des Interesses von Mathematikern, Naturwissenschaftlern und Ingenieuren. Nahezu jedes physikalische Problem etwa führt auf eine Differentialgleichung, deren Lösung bestimmte zusätzliche Bedingungen – in der Regel auf dem Rand eines Gebietes – erfüllen muß.

Integralgleichungsmethoden spielen eine wichtige Rolle bei der Behandlung dieser Randwertprobleme. Sie werden nicht nur zum Studium der Streuung akustischer oder elektromagnetischer Wellen benutzt – wir denken hier etwa an [Gü], [Ke], [Le], [Wd], [Wr1], [Wr2], [CK1] –, sondern auch in verschiedenen anderen Bereichen der mathematischen Physik, etwa der Theorie der Wärmeleitung, der Elastizitätstheorie, bei Strömungsproblemen und anderen. Randintegralgleichungsmethoden haben eine lange Geschichte und wurden schon von Neumann, Poincaré und Fredholm verwendet.

In den letzten Jahren traten *inverse Probleme* zu den entsprechenden Randwertproblemen mehr und mehr ins Zentrum der Aufmerksamkeit der fachlichen Öffentlichkeit. Es handelt sich dabei in der Regel um die Rekonstruktion von Parametern oder bestimmender Größen der sogenannten *direkten* Probleme aus dem gemessenen Abbildungsverhalten. Die Behandlung inverser Probleme wirft eine Reihe von weitergehenden Fragen auch an die ursprünglichen Probleme auf, die bisher nicht oder nur rudimentär behandelt wurden.

Wir betrachten in dieser Arbeit die Streuprobleme am schallweichen und schallharten undurchdringlichen Hindernis zur *zeitharmonischen akustischen Wellengleichung* – der *Helmholtzgleichung* – und das elektromagnetische Streuproblem am idealen Leiter zu den *zeitharmonischen Maxwellgleichungen* im $\mathbb{R}^3$. Das sogenannte *direkte Problem* besteht darin, zu einem Gebiet D und einer gegebenen einfallenden Welle eine Lösung der gegebenen Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ zu finden, welche den zum Streuproblem gehörigen Randbedingungen genügt. Beim *inversen Problem* versucht man das *Gebiet* D zu bestimmen, wenn zu einer festen einfallenden Welle die Lösung des Randwertproblems oder deren Werte u^{meas} auf Teilmengen des $I\!R^3 \setminus D$ vorgegeben ('gemessen') sind.

Das Ziel, ein Gebiet bei vorgegebenen Streudaten zu *rekonstruieren*, führt auf die Frage nach der Abhängigkeit des gestreuten Feldes u^s von der Form des Gebietsrandes ∂D. Es geht also um das Studium und die Invertierung der Abbildung

$$u^s : \partial D \mapsto u^s(\partial D). \tag{1}$$

Diese Abbildung ist stark *nichtlinear*. Die Gleichung $u^s(\partial D) = u^{meas}$ besitzt nicht unbedingt eine *eindeutige*, in vielen Fällen gar keine Lösung und die Lösung hängt bei praxisnaher Wahl der Normen nicht stetig von der rechten Seite ab. Es handelt sich somit um ein im Hadamard'schen Sinne – vgl. [Ha] – *schlecht gestelltes Problem*.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den *Differenzierbarkeitseigenschaften* der durch (1) gegebenen Abbildung. Der hier vorgestellte Weg zum Nachweis der Fréchet Differenzierbarkeit mit Hilfe von Integralgleichungsmethoden ist neu in der Streutheorie und der Theorie partieller Differentialgleichungen. Er wird in dieser Arbeit an drei Randwertproblemen ausgeführt. Eine weitere Anwendung wurde schon von Kreß ausgearbeitet (vgl. [K2]). Er behandelt Inverse Streuung am offenen Bogen mit Hilfe eines Quasi-Newton Verfahrens. Bei den bisher in der Literatur bekannten Zugängen wurde die Differenzierbarkeit eines Randwertproblems mit Hilfe von Variationsmethoden (vgl. [Ki3]) oder unter Ausnutzung des Satzes über implizite Funktionen (vgl. [S]) nachgewiesen – eine genauere Einordnung geben wir weiter unten nach der Beschreibung der Ergebnisse dieser Arbeit.

Eine Darstellung der angesprochenen Streuprobleme, ihrer Lösung und der Differenzierbarkeitsresultate in Abhängigkeit vom Rand finden sich im **vierten Kapitel** der Arbeit. Das vierte Kapitel enthält somit die für die *Motivation* der gesamten Arbeit zentralen Probleme und sollte vom Leser vor allen anderen Teilen der Arbeit gelesen werden. Wir erläutern im folgenden kurz das Prinzip des Vorgehens, die wichtigsten Ergebnisse und erklären den Aufbau der Arbeit.

Im vierten Kapitel wird die Lösung des jeweiligen Randwertproblems mit Hilfe eines *Potentialansatzes* der Form

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in I\!R^3 \setminus \overline{D} \tag{2}$$

auf die Lösung einer *Randintegralgleichung* der Form

$$\varphi(x) - 2\int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D \tag{3}$$

zurückgeführt. Die Funktion K löst die entsprechende Differentialgleichung für $x \neq y$. Die Dichte φ ist eine stetige oder hölderstetige Funktion auf dem Rand ∂D des Gebietes D. Der Integraloperator besitzt einen singulären Kern. Demnach folgen wir den klassischen Potentialansätzen und der Theorie der Integraloperatoren in der Menge der stetigen Funktionen und in Hölderräumen, wie sie etwa in [CK1], aber auch [Le], [Ku1] oder [MP] ausführlich beschrieben sind.

Wir betrachten nun eine Schar

$$\partial D_r := \{x + r(x), x \in \partial D\}$$

von Flächen, welche sich aus einer Referenzfläche $\partial D = \partial D_0$ durch die Transformationen

$$x \mapsto x_r := x + r(x), \quad x \in \partial D_0$$

mit einem hinreichend glatten Vektorfeld $r : \partial D \to I\!R^3$ ergibt. Wir transformieren die bei der Streuung an D_r anstelle von (2) und (3) auftretenden Potentiale und Randintegraloperatoren über ∂D_r auf den Rand ∂D_0 des Referenzgebietes. Man erhält etwa für den Integraloperator aus (3) die Form

$$\int_{\partial D} K(x_r, y_r)\varphi(y_r)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D_r, \tag{4}$$

wobei $J_T(r,y)$ die Transformationsdeterminante des Oberflächenelements von ∂D_r auf die Fläche ∂D im Punkt y bzw. y_r darstellt. Die Operatoren sind beschränkte lineare Abbildungen zwischen den Mengen der stetigen, hölderstetigen oder hölderstetig differenzierbaren Funktionen auf dem Rand des Referenzgebietes. Die Abhängigkeit der Lösung des Streuproblems vom Rand des Gebietes kann nun untersucht werden, indem die Abhängigkeit des auf ∂D_0 transformierten Potentials (2) und der transformierten Operatoren (4) vom Vektorfeld r studiert wird. Diese Untersuchung geschieht in Kapitel 3. Im vierten Kapitel wird aus den Ergebnissen des dritten Kapitels schließlich die beliebig häufige Fréchet Differenzierbarkeit der angesprochenen Randwertprobleme in Abhängigkeit vom Rand abgeleitet.

Im **dritten Kapitel** wird die *Fréchet Differenzierbarkeit* verschiedener auf ∂D_0 transformierter Potentiale der Form (2) und Randintegraloperatoren der Form

(4) in Abhängigkeit vom Vektorfeld r nachgewiesen. Bei den in Abschnitt 3.1 vorgestellten Operatoren handelt es sich um die klassischen *Einfach-* und *Doppelschichtpotentialoperatoren* – vgl. [CK1], [Gü], [Ke], [Ki2], [Ma], [Wd], [Wr1] oder [Wr2] – zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen. Nachdem wir in Abschnitt 3.2 einige grundlegende Dinge zum Begriff der Fréchet Ableitung zusammengestellt haben, wird im zentralen *Differentiationssatz* in Abschnitt 3.3 gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen die Fréchet Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{ \int_{\partial D} K(x_r, y_r)\varphi(y_r)J_T(r,y)ds(y)\right\} \tag{5}$$

des Randintegraloperators durch den Integraloperator

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial r}\Big\{K(x_r, y_r)\varphi(y_r)J_T(r,y)\Big\}ds(y) \tag{6}$$

gegeben ist, also durch Ableitung des Integranden berechnet werden kann. Zu den Voraussetzungen gehört die zweimalige Fréchet Differenzierbarkeit des Kernes

$$K(x_r, y_r)J_T(r,y)$$

in Abhängigkeit von r. Diese Differenzierbarkeit der Kerne ist Gegenstand von Abschnitt 3.4. Nachzuweisen sind ferner die Abbildungseigenschaften des Operators (6) über den einmal bzw. des Operators

$$\int_{\partial D} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big\{K(x_r, y_r)\varphi(y_r)J_T(r,y)\Big\}ds(y) \tag{7}$$

über den zweimal differenzierten Integranden in den betrachteten Räumen. Mit diesen Abbildungseigenschaften in den Räumen der stetigen bzw. hölderstetigen Funktionen beschäftigen wir uns in Abschnitt 3.5. In Abschnitt 3.6 arbeiten wir schließlich in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen.

Zu den wesentlichen Voraussetzungen des Differentiationssatzes aus Abschnitt 3.3 gehört, daß die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren (7) *gleichmäßig* für alle Ränder einer Umgebung des Referenzgebietes gelten, d. h. daß die Menge der Operatornormen beschränkt ist. Da sich diese Gleichmäßigkeit nicht unmittelbar aus den in der Literatur vorhandenen Sätzen ablesen läßt, werden in

Kapitel 2 Sätze über Abbildungseigenschaften von singulären und schwach singulären Integraloperatoren über Flächen im $I\!R^3$ bewiesen. Die Sätze des Kapitels orientieren sich an analogen Sätzen aus den Büchern von [CK1], [MP] und [Ku2]. Bei den Beweisen wurde im Unterschied zu den genannten Büchern mit speziellen Atlanten – vgl. Abschnitt 1.2 – gearbeitet, so daß die jeweiligen Konstanten explizit im Beweis und im Satz auftauchen. Das zweite Kapitel bereitet somit durch Aufarbeitung der Literatur das dritte Kapitel vor. Die Ausgliederung der Ergebnisse aus dem dritten Kapitel ist durch die relative Eigenständigkeit der Sätze im Verhältnis zu den Differenzierbarkeitsaussagen gerechtfertigt.

Kapitel 1 dient zur Einführung einiger wesentlicher Begriffe und zur Darstellung einiger Eigenschaften und Sätze über singuläre Integraloperatoren, auf die wir später unmittelbar zugreifen wollen. Zum Teil geben wir dort Teile aus [K1], [CK1], [Ki1] und [MP] in geeigneter Zusammenstellung wieder. Die **Kapitel 1** bis **Kapitel 3** sollten im wesentlichen ohne Heranziehung weiterer Literatur verständlich sein – es wurde Wert auf eine elementare Darstellung gelegt. Allerdings geht es in ihnen weniger um eine Einführung für den mit Integralgleichungsmethoden unerfahrenen Leser als vielmehr um eine zusammenhängende und systematische Darstellung der hier gewonnenen Ergebnisse. **Kapitel 4** und **Kapitel 5** beziehen sich unmittelbar auf die Bücher [CK1] und [CK2] von D. Colton und R. Kreß. Hier wurde häufig auf die erneute Darstellung der benutzten Sätze und Gleichungen verzichtet.

Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung eines Streuproblems in Abhängigkeit vom Rand eröffnen die Möglichkeit zur Anwendung des *Newton Verfahrens* oder Newton-ähnlicher Verfahren zur Lösung des inversen Problems, also zur Invertierung der Abbildung (1). Wir verweisen hier auf die einschlägige Literatur zum Newton Verfahren in Banachräumen und auf [R], [K2], [KR], [Ki3], [Mu], [P], [To] und [WC]. Die Untersuchung effektiver Formen des Newton-Verfahrens zur Lösung des jeweiligen inversen Problems gehört *nicht* zur Aufgabenstellung dieser Arbeit.

Die *praktische Berechnung* der Fréchet Ableitung eines Streuproblems mit Hilfe der differenzierten Integralgleichungen erweist sich als nicht effektiv. Aus diesem Grund und aus theoretischem Interesse geben wir im **fünften Kapitel** *Charakterisierungen* der Fréchet Ableitungen der Streuprobleme: sie sind wiederum Lösungen entsprechender Randwertprobleme. Die Ableitungen können also als

Lösungen von Randwertproblemen mit den bekannten Methoden berechnet werden.

Die Differenzierbarkeitseigenschaften des Streuproblems am *schallweichen Hindernis* wurden – wie oben schon angeschnitten – mit Hilfe von Variationsmethoden von D. Colton und R. Kreß in [CK2] und von A. Kirsch – siehe [Ki3] – untersucht. Auch J. Simon untersucht in [S] die Differenzierbarkeit von Randwertproblemen und von Integraloperatoren, allerdings nicht für singuläre oder schwach singuläre Kerne und nicht in den klassischen Räumen, sondern in Sobolevräumen, so daß seine Überlegungen für die hier zu untersuchende Streutheorie nicht nutzbar sind. Die Fréchet Differenzierbarkeit impliziert die "$\Gamma-$Differenzierbarkeit" oder die "domain derivative", wie sie in [P] oder [Ki3] definiert wird.
Eine *Charakterisierung* der Fréchet Ableitung des Streuproblems am *schallweichen Hindernis* wurde schon in [Ki3] von A. Kirsch mit Hilfe von Variationsmethoden abgeleitet. Die hier dargestellten und mit *Integralgleichungsmethoden* erzielten Ergebnisse der Abschnitte 4.2 und 5.1 zu diesem Problem findet man in [Po] veröffentlicht.
Die Differenzierbarkeit der Lösung des Streuproblems am *schallharten* Hindernis und des *Elektromagnetischen Streuproblems* und die in den Abschnitten 5.2 und 5.3 dargelegte Charakterisierung der Ableitungen sind nach meinem Wissen bisher unveröffentlicht.

Für die fachliche Unterstützung und viele fruchtbare Diskussionen während der Anfertigung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß. Eine große Hilfe war mir die Möglichkeit, meine noch unausgereiften Überlegungen nach und nach im Rahmen eines Doktorandenseminars im Sommer 1993 und Winter 1993/94 in etwa zwei bis dreiwöchigem Abstand vortragen zu können.

Göttingen, September 1994
Roland Potthast

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1 Grundlagen **1**
1.1 Die Räume der stetig und hölderstetig differenzierbaren Funktionen 2
1.2 Gebiete mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand 4
1.3 Scharen von Gebieten und etwas Differentialgeometrie 7
1.4 Einige technische Details 18
1.5 Singuläre Integraloperatoren 22
1.6 Differentiation von schwach singulären Integralen 27

2 Abbildungseigenschaften singulärer Integraloperatoren **29**
2.1 Singuläre Integraloperatoren über Gebiete im $I\!R^2$ 29
2.2 Singuläre Integraloperatoren über Ränder von Gebieten im $I\!R^3$ . . 38

3 Fréchet Differenzierbarkeit von Integral- und Randintegraloperatoren **51**
3.1 Potentiale und Potentialoperatoren 52
3.2 Fréchet Differenzierbarkeit 60
3.3 Ein Differentiationssatz 66
3.4 Die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne von Potentialen und Potentialoperatoren 70
3.5 Die Fréchet Differenzierbarkeit von Operatoren in den Räumen der hölderstetigen Funktionen 78
3.6 Die Fréchet Differenzierbarkeit von Operatoren in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen 83

4 Fréchet Differenzierbarkeit von Randwertproblemen 101
4.1 Akustische und elektromagnetische Wellen 102
4.2 Das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis 103
4.3 Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis 106
4.4 Das elektromagnetische Streuproblem am idealen Leiter 110

5 Charakterisierungen der Ableitungen von Randwertproblemen 117
5.1 Das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis 117
5.2 Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis 125
5.3 Das elektromagnetische Streuproblem am perfekten Leiter 131

Literaturverzeichnis 138

Kapitel 1

Grundlagen

Im ersten Kapitel der Arbeit sammeln wir einige Grundlagen aus der Analysis und aus der Theorie der Integral- und Randintegralgleichungen.

Der erste Abschnitt dient zur Darstellung von Notationen zu den Räumen der *stetigen* und *hölderstetigen* Funktionen.

Die Abschnitte 1.2 und 1.3 beschäftigen sich mit *Gebieten* im $\mathbb{R}^3$, die einen $C^{m,\alpha}-$*glatten Rand* haben, wobei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\alpha \in [0,1)$ ein reeller Parameter ist. Der zweite Abschnitt zeigt zunächst eine Möglichkeit zur analytischen Beschreibung solcher Ränder mit Hilfe von *Atlanten* auf, wie sie aus der Differentialgeometrie wohlbekannt ist. Diese Atlanten werden dann zur Definition von Funktionenräumen auf dem Rand eines Gebietes benutzt.

Um die Abhängigkeit von Randwertproblemen vom Rand eines Gebietes studieren zu können, betrachten wir in Abschnitt 1.3 bestimmte durch ihre Ränder

$$\partial D_r := \{x + r(x), x \in \partial D\}$$

mit Vektorfeldern $r \in C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)$ definierte *Scharen von Gebieten*. Für 'kleine' r liegen diese in einer geeigneten Umgebung eines Referenzgebietes D_0. Funktionen auf ∂D_r und in Abschnitt 3.1 auch Integraloperatoren werden im Verlauf der Arbeit *auf* ∂D_0 *transformiert* und dort in Abhängigkeit von r untersucht.

Im Abschnitt 1.3 führen wir ferner alle später benötigten *differentialgeometrischen Größen* ein. Wir geben jeweils auch die auf ∂D_0 transformierte Form an, so daß in Kapitel 3 bei der Untersuchung der Abhängigkeit von r direkt darauf zurückgegriffen werden kann.

In Abschnitt 1.4 werden einige technische Details zu den Gebieten D_r ausgeführt.

Singuläre und *schwach singuläre Integraloperatoren* treten bei der Behandlung von Randwertproblemen mit Hilfe von Potentialansätzen auf. In Abschnitt 1.5 werden die Begriffe und Notationen eingeführt. Außerdem dient dieser Abschnitt dazu, auf bestimmte analytische Schwierigkeiten einzugehen, die bei der Behandlung von *Cauchy-Hauptwerten* über Flächen auftreten.

Die Abbildungseigenschaften von speziellen schwach singulären Integraloperatoren in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen werden in Abschnitt 3.6 untersucht. Zu ihrer Vorbereitung dient der in Abschnitt 1.6 bewiesene Satz über die Differenzierbarkeit eines Integraloperators mit schwach singulärem Kern.

1.1 Die Räume der stetig und hölderstetig differenzierbaren Funktionen

Der vorliegende Abschnitt führt grundlegende Bezeichnungen ein.

Stets sei $D \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge mit Rand ∂D und Abschluß $\overline{D}$. Im vierten Kapitel stellt D ein Gebiet dar, an welchem akustische und elektromagnetische Felder gestreut werden. Wir nutzen eckige Klammern $\langle .,. \rangle$ ohne jede Indizierung zur Bezeichnung des *euklidischen Skalarproduktes* im $\mathbb{R}^3$. $\Omega_\epsilon(x)$ bezeichne die Kugel mit Radius ϵ um den Punkt x im $\mathbb{R}^3$ bzw. im $\mathbb{R}^2$ den entsprechenden Kreis, $S_\epsilon(x)$ die Sphäre vom Radius ϵ um x bzw. im $\mathbb{R}^2$ den Rand des Kreises. Sei $d(V, W)$ der *euklidische Abstand* der Mengen V und W in $\mathbb{R}^N$ bei einer vorgegebenen Raumdimension $N \in \mathbb{N}$.

Wir kommen nun zu den Mengen der *stetigen* und *stetig differenzierbaren* Funktionen. Zur Raumdimension $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^N$. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &:= \{ \text{ Funktionen } \varphi : U \to \mathbb{C}\}, \\ C^m(U) &:= \{ \ m\text{-mal stetig differenzierbare Funktionen } \varphi : U \to \mathbb{C} \ \}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} C^m(\overline{U}) & := & \{ \ \varphi \in C^m(U), \text{ alle Ableitungen von } \varphi \text{ bis zur Ordnung} \\ & & \ \ m \text{ können stetig auf den Rand } \partial U \text{ von } U \text{ fortgesetzt} \\ & & \ \ \text{werden } \}, \\ BC^m(U) & := & \{ \ \varphi \in C^m(U) \text{ mit beschränkten Ableitungen auf } U \}. \end{array}$$

Mit $\gamma := (\gamma_1, ..., \gamma_N)$ bezeichnen wir Multiindizes. Die *Länge* des Multiindex γ wird durch $|\gamma| := \gamma_1 + ... + \gamma_N$ gegeben. Ferner haben wir den zugehörigen *Differentiationsoperator*

$$D^\gamma := \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial u_1^{\gamma_1} ... \partial u_N^{\gamma_N}}.$$

Auf dem Raum $BC^m(U)$ der $m-$mal stetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkter $m-$ter Ableitung ist durch

$$\| \varphi \|_{BC^m(U)} := \sum_{|\gamma| \leq m} \max_{u \in U} |D^\gamma \varphi(u)|$$

eine Norm erklärt. $BC^m(U)$ wird mit dieser Norm zu einem Banachraum.

Nun sollen *vektorwertige* Funktionen behandelt werden. Wir betrachten eine Menge $W \subset I\!R^N$ oder $W \subset \mathbb{C}^N$. Mit $C^m(U, W)$ bezeichnen wir die Menge der Abbildungen $U \to W$, deren Komponenten $m-$mal stetig differenzierbar sind. Analog zum Vorausgehenden werden die Bezeichnungen $\mathcal{F}(U, W)$, $C^m(\overline{U}, W)$ und $BC^m(U, W)$ eingeführt. *Normen* auf $BC^m(U, W)$ erhält man durch das Maximum der jeweiligen Normen der Komponenten.

Gegeben seien Mengen $U \subset I\!R^M, W \subset I\!R^N$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\Psi \in C^1(U, W)$. Dann wird die Funktionalmatrix $\mathbf{grad}\Psi$ von Ψ durch

$$(\mathbf{grad}\Psi)(u) := (\mathrm{grad}\Psi_1(u), ..., \mathrm{grad}\Psi_N(u))$$

gegeben.

Bei der Behandlung von Integraloperatoren sind die Räume der *hölderstetigen* und *hölderstetig differenzierbaren* Funktionen von zentraler Bedeutung. Betrachten wir Zahlen $\alpha \in (0, 1]$ und $m \in I\!N_0$. Dann bezeichnen wir die Menge der $m-$mal $\alpha-$hölderstetig differenzierbaren Funktionen mit

$$\begin{array}{rl} C^{m,\alpha}(U) := \{ & \varphi \in BC^m(U), |D^\gamma \varphi(u) - D^\gamma \varphi(v)| \ \ \leq c\,|u - v|^\alpha \text{ für alle} \\ & u, v \in U, |\gamma| \ \leq m \text{ mit einer Konstante } c > 0. \ \} \end{array}$$

Auf $C^{m,\alpha}(U)$ wird durch

$$\| \varphi \|_{C^{m,\alpha}(U)} := \| \varphi \|_{BC^m(U)} + \sup_{\substack{u,v\in U,\\ u\neq v}} \sup_{|\gamma|=m} \frac{|D^\gamma\varphi(u) - D^\gamma\varphi(v)|}{|u-v|^\alpha}$$

eine Norm erklärt. $C^{m,\alpha}(U)$ wird mit dieser Norm ein Banachraum. Der Raum $C^{m,\alpha}(U,W)$ wird analog zu $C^m(U,W)$ eingeführt und zu einem Banachraum gemacht.

1.2 Gebiete mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand

Im zweiten und dritten Kapitel der Arbeit werden Integraloperatoren über den $C^{m,\alpha}-$glatten Rand ∂D eines Gebietes D untersucht. Hier präsentieren wir darum einige *differentialgeometrische Grundlagen*, die zum Studium der Ränder solcher Gebiete und auf ihnen definierter Funktionen nützlich sind. Es geht dabei zunächst um die Definition der Ränder und um die Möglichkeit, diese mit Hilfe von Karten in den Griff zu bekommen. Ferner fassen wir noch einmal einige Notationen zu Funktionenräumen auf ∂D zusammen.

Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet. Dann existiert ein $\Gamma_0 > 0$, so daß $|x-y| \leq \Gamma_0$ gilt für alle $x, y \in D$.

Gegeben sei eine natürliche Zahl $m \in I\!N$. Wir sagen, der Rand ∂D von D sei *von der Klasse* $C^{m,\alpha}$ bzw. er sei $C^{m,\alpha}-$*glatt*, wenn ∂D eine *zweidimensionale* $C^{m,\alpha}-$*Mannigfaltigkeit* ist, d.h. wenn es zu jedem Punkt $x \in \partial D$ eine bezüglich der Relativtopologie von ∂D in $I\!R^3$ offene Umgebung $V \subset \partial D$ gibt, eine zusammenhängende offene Menge $U \subset I\!R^2$ und eine $m-$mal $\alpha-$hölderstetig differenzierbare stetig umkehrbare Abbildung $\Psi : U \to V$ mit Rang $(\mathbf{grad}\Psi) = 2$. Der Homöomorphismus $\Psi : U \to V$ heißt *lokale Karte*. Wir sprechen auch von *lokalen Koordinaten*.

Mit $\mathcal{J}$ bezeichnen wir eine Indexmenge. Sei $U_i \subset I\!R^2$ offen für $i \in \mathcal{J}$, $\{V_i, i \in \mathcal{J}\}$ eine offene Überdeckung von ∂D und seien $\Psi_i : U_i \to V_i$ lokale Karten. Dann nennen wir $\mathcal{A} : \{(U_i, V_i, \Psi_i), i \in \mathcal{J}\}$ einen *Atlas* von ∂D.

In Kapitel 2 sollen Schranken für die Normen bestimmter Randintegraloperatoren über ∂D explizit ausgerechnet werden. Diese hängen unter anderem von der

Form des Gebietes D ab. Die bei der Definition der folgenden speziellen Atlanten auftretenden Konstanten sind die maßgeblichen Größen.

$\mathcal{A}$ heißt *isometrischer Atlas* der $C^{m,\alpha}-$Fläche ∂D, wenn es positive Konstanten Γ_1 und Γ_2 gibt, so daß gilt

$$\begin{array}{llll} 1. & \| \Psi_i \|_{C^{m,\alpha}(U_i,\mathbb{R}^3)} & \leq & \Gamma_1, & i \in \mathcal{J} \\ 2. & |\Psi_i(u) - \Psi_i(v)| & \geq & \Gamma_2 \, |u-v| \, , & u, v \in U_i, i \in \mathcal{J} \end{array}$$

Nimmt man an, daß die Konstante Γ_1 minimal, die Konstante Γ_2 maximal gewählt ist, so sind Γ_1 und Γ_2 eindeutig. Wir verzichten allerdings hier darauf.

Durch Verkleinerung der offenen Mengen U_i bzw. V_i läßt sich mit Hilfe eines Kompaktheitsargumentes stets die erste Abschätzung erreichen. Auch die zweite Abschätzung kann mit einem analogen Argument unter zusätzlicher Berücksichtigung der Gleichung Rang($\mathbf{grad}\Psi$) $= 2$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden. Es läßt sich somit stets ein isometrischer Atlas zum $C^{m,\alpha}-$glatten Rand ∂D eines beschränkten Gebietes finden.

Beim Studium der Regularitätseigenschaften singulärer Integraloperatoren wird das Integrationsgebiet häufig in der Form $\partial D = V \cup (\partial D \setminus V)$ aufgespalten und das Integral auf einer Menge V' mit $\overline{V'} \subset V$ ausgewertet. Um daraus auf die Regulärität der Gesamtfunktion schließen zu können, gehen wir wie folgt vor. Sei $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \Psi_i), i = 1, ..., N\}$ ein endlicher isometrischer Atlas von ∂D. Dann existieren zusammenhängende offene Mengen $U_i' \subset \mathbb{R}^2$ mit $\overline{U_i'} \subset U_i$, so daß $\{V_i' := \Psi_i(U_i')\}$ wieder eine offene Überdeckung von ∂D bildet. Es ist dann $\Gamma_3 := \inf_{i=1,...,N} d(V_i', \partial D \setminus V_i)$ größer als Null.

Zu einem endlichen isometrischen Atlas einer beschränkten Fläche ∂D setzen wir stets die Mengen U_i' und die Konstanten $\Gamma_0, ..., \Gamma_3$ als gegeben voraus.

Inwiefern wir bei der Arbeit mit Karten von einem speziellen Atlas unabhängig sind, zeigt die folgende Aussage: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand. Sind $\Psi_1 : U_1 \to V$ und $\Psi_2 : U_2 \to V$ zwei Karten, so ist die *Parametertransformation* $\tau := \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2 : U_2 \to U_1$ und ihre Inverse $m-$mal $\alpha-$hölderstetig differenzierbar (vgl. [F3], §14 Satz 5).

Wir definieren nun Funktionenräume auf ∂D. Sei stets $\mathcal{A}$ ein Atlas des C^m-glatten

Randes ∂D und μ eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ mit $0 \le \mu \le m$. Wir setzen

$$C^\mu(\partial D) := \{\varphi : \partial D \to \mathbb{C},\;\; \varphi \circ \Psi \in C^\mu(U) \quad \text{für alle } (U, V, \Psi) \in \mathcal{A}\}.$$

Weiterhin gilt für ∂D von der Klasse $C^{m,\alpha}$ die Bezeichnung

$$C^{m,\alpha}(\partial D) := \{\varphi : \partial D \to \mathbb{C},\;\; \varphi \circ \Psi \in C^{m,\alpha}(U) \quad \text{für alle } (U, V, \Psi) \in \mathcal{A}\}.$$

Wegen der Differenzierbarkeit der Parametertransformationen sind diese Räume unabhängig von der Wahl des Atlanten $\mathcal{A}$.

In kanonischer Weise führen wir die Bezeichnungen $C^\mu(\partial D, W)$ und $C^{m,\alpha}(\partial D, W)$ für Mengen $W \subset \mathbb{R}^N$ oder $W \subset \mathbb{C}^N$ ein.

Wir betrachten einen Rand ∂D von der Klasse C^1. Gegeben sei eine Menge $V \subset \partial D$ und ein Punkt $x \in V$. Mit $T(V, x)$ bezeichnen wir die Menge der *Tangentialvektoren* $t \in \mathbb{R}^3$ an ∂D in x. $T(V)$ bezeichnet die Menge der *Tangentialfelder* an V. Entsprechend heißt die Menge der *stetigen Tangentialfelder* $CT(V)$. Die Menge der punktweise auf eins normierten stetigen Tangentialfelder nennen wir $NCT(V)$, die Menge der hölderstetigen Tangentialfelder $CT^{0,\alpha}(V)$.

Auf $C(\partial D)$ nutzen wir die kanonische Supremumsnorm. Auf $C^{0,\alpha}(\partial D)$ wird eine Norm durch

$$\|\, \varphi \,\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \;:=\; \|\, \varphi \,\|_{C(\partial D)} \;+\; \sup_{\substack{x \neq y,\\ x,y \in \partial D}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

gegeben. Sei $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial D)$ und sei $\mathcal{A} = \{\ (U_i, V_i, \Psi_i),\ i \in \mathcal{J}\ \}$ ein isometrischer Atlas von ∂D. Dann setzen wir

$$\|\, \varphi \,\|_{\mathcal{A}} := \sup_{i \in \mathcal{J}} \|\, \varphi \circ \Psi_i \,\|_{C^{m,\alpha}(U_i)}. \tag{1.1}$$

Entsprechend werden Normen für hölderstetig differenzierbare Vektorfelder auf ∂D definiert. Weitere Normen auf $C^m(\partial D)$ bzw. $C^{m,\alpha}(\partial D)$ für $m \ge 1$ führen wir im nächsten Abschnitt ein.

1.3 Scharen von Gebieten und etwas Differentialgeometrie

Der vorliegende Abschnitt 1.3 hat zwei Funktionen. Erstens sollen zu einem Gebietsrand ∂D *differentialgeometrische Begriffe* und *Funktionen* bereitgestellt werden, die in Kapitel 3 zum Studium der singulären und schwach singulären Integraloperatoren benötigt werden. Zweitens soll die Untersuchung der *Abhängigkeit* dieser Größen *vom Rand* des Gebietes vorbereitet werden. Dazu betrachten wir zunächst

Die Gebietstransformation

In Kapitel 3 werden Randintegraloperatoren und in Kapitel 4 Randwertprobleme in Abhängigkeit vom Rand eines Gebietes untersucht. Wie erfaßt man eine geeignete Menge von Rändern? Welche Metrik oder Norm soll darauf eingeführt werden?

In dieser Arbeit werden Randwertprobleme mit Hilfe von Potentialansätzen und Randintegralgleichungen gelöst. Dabei werden die Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren in der Menge der hölderstetigen und hölderstetig differenzierbaren Operatoren an zentraler Stelle ausgenutzt. Diese Abbildungseigenschaften erhält man nur, wenn ∂D hinreichend glatt, etwa C^2- bzw. $C^{2,\alpha}-$glatt ist. Wir sind mit der Menge von Rändern also auf hinreichend glatte Ränder festgelegt. Auch die Wahl einer geeigneten Metrik auf unserer Menge von Gebieten muß sich daran orientieren.

Wir erhalten für das einfachste in Kapitel 4 betrachtete Randwertproblem eine geeignete Schar von Gebieten, wenn wir auf den Rand eines Referenzgebietes D eine Schar von C^2-glatten und in der C^2-Norm kleinen Vektorfelder addieren. Damit sind gleichzeitig alle Gebiete erfaßt, deren Rand, Tangentenvektoren und Krümmung sich hinreichend wenig von den zu ∂D gehörigen Größen unterscheidet. Eine Verallgemeinerung dieser Überlegung führt uns zu folgendem Vorgehen.

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche und $\rho > 0$ eine hinreichend kleine reelle Zahl. Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand und ein

$m-$mal hölderstetig differenzierbares Vektorfeld $r : \partial D \to I\!R^3$ mit Norm

$$\| r \|_{\mathcal{A}} < \rho.$$

Wir setzen

$$x_r := x + r(x)$$

und studieren Gebiete D_r, welche durch den Rand

$$\partial D_r := \{x_r, x \in \partial D\}$$

definiert sind. Für hinreichend kleines ρ sind die Ränder ∂D_r wieder $C^{m,\alpha}$ glatt – in Abschnitt 1.4, Lemma 1.3 finden sich dazu genauere Aussagen. Wir setzen von nun an stets ρ als hinreichend klein gewählt voraus.

Die Transformation der Räume

Gegeben seien Mengen $V \subset \partial D$ und $W \subset I\!R^N$. Wir setzen $V_r := \{x_r, x \in V\}$. Dann ist $V_r \subset \partial D_r$. Sind ∂D und r hinreichend glatt, so können wir Teilräume E von $\mathcal{F}(V_r, W)$ vermöge der Abbildung $\mathcal{T} : \overline{\varphi} \mapsto \varphi$,

$$\varphi(x) := \overline{\varphi}(x + r(x)), \;\; x \in \partial D,$$

isomorph auf einen entsprechenden Teilraum von $\mathcal{F}(V, W)$ abbilden. Da alle Funktionen und Operatoren stets nur in Teilräumen von $\mathcal{F}(V, W)$ betrachtet werden sollen, verzichten wir in der gesamten Arbeit auf voneinander abweichende Bezeichnungen von E und dem jeweiligen Bildraum unter $\mathcal{T}$ und identifizieren φ und $\overline{\varphi}$.

Die Inverse $\mathcal{T}^{-1}$ von $\mathcal{T}$ wird gegeben durch

$$\overline{\varphi}(y) := \varphi(y + \overline{r}(y)), \;\; y \in \partial D_r$$

mit

$$\overline{r}(x_r) := -r(x), \;\; x \in \partial D.$$

Bei $C^{m,\alpha}-$glattem Gebietsrand ∂D sind die Abbildungen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^{-1}$ zwischen $C^{m,\alpha}(\partial D)$ und $C^{m,\alpha}(\partial D_r)$ normbeschränkt, was weiter unten anhand der Definition der Normen eingesehen werden kann.

Beispielsweise werden durch die angegebene Transformation bei einem Gebiet D mit C^2-glattem Rand die Räume $C^2(\partial D_r)$ und $C^2(\partial D)$ bijektiv und normbeschränkt aufeinander abgebildet.

Der Normalenvektor

Gegeben sei ein Vektorfeld $r \in C^{m,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ mit hinreichend kleiner Norm $\| r \|_{\mathcal{A}}$. Mit $\nu(r, y)$ bezeichnen wir den nach außen weisenden Normalenvektor an den Rand eines Gebietes D_r im Punkt $y_r \in \partial D_r$. In lokalen Koordinaten schreiben wir $\tilde{\nu} := \nu \circ \Psi$, wobei $\Psi : U \to V$ eine lokale Karte eines Atlanten von ∂D ist. Nach eventuellem Vertauschen der Koordinaten u_1 und u_2 von $u = (u_1, u_2) \in U$ erhalten wir die Darstellung

$$\tilde{\nu}(r) = \frac{N(r)}{J(r)} \tag{1.2}$$

mit

$$N(r) \;:=\; \Big\{ \Big(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + \frac{\partial r \circ \Psi}{\partial u_1} \Big) \times \Big(\frac{\partial \Psi}{\partial u_2} + \frac{\partial r \circ \Psi}{\partial u_2} \Big) \Big\}$$

und

$$J(r) := \Big| \Big(\frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + \frac{\partial r \circ \Psi}{\partial u_1} \Big) \times \Big(\frac{\partial \Psi}{\partial u_2} + \frac{\partial r \circ \Psi}{\partial u_2} \Big) \Big| .$$

Die Fundamentaltensoren und die Mittlere Krümmung

Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D. Wir betrachten eine lokale Karte $\Psi : U \to V$ aus $\mathcal{A}$ mit offenen Mengen $V \subset \partial D$ und $U \subset I\!R^2$. Als *ersten Fundamentaltensor der Differentialgeometrie* für die Fläche ∂D bezeichnet man die symmetrische Größe $G := ((g_{j,k})_{j,k=1,2})$,

$$g_{j,k} := \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_j}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} \Big\rangle, \quad j, k = 1, 2. \tag{1.3}$$

Wir nutzen für $a, b \in I\!R^3$ die Beziehung

$$\langle a \times b, a \times b \rangle = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2$$

und erhalten (mit Hilfe von Rang $(\mathbf{grad}\Psi) = 2$)

$$\begin{aligned} \det G &= \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \Big\rangle \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \Big\rangle^2 \\ &= \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \Big\rangle > 0. \end{aligned}$$

In Lemma 1.4 des Abschnitts 1.4 wird sogar die Existenz einer Konstanten c mit $\det G \geq c > 0$ auf U gezeigt. Wir erhalten

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \rangle & -\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \rangle \\ -\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \rangle & \langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \rangle \end{pmatrix}$$

und nutzen die Schreibweise $g^{i,l} := (G^{-1})_{i,l}$ für $i, l = 1, 2$. Es gilt $g^{i,l} \in C^1(U)$. Durch Differentiation der Gleichung $\langle \nu, \frac{\partial \Psi}{\partial u_j} \rangle = 0, j = 1, 2$, erhält man für die durch

$$b_{j,k} := \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_k \partial u_j} \Big\rangle$$

definierten Größen die Beziehung

$$\Big\langle \nu, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_k \partial u_j} \Big\rangle = -\Big\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_k}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_j} \Big\rangle. \tag{1.4}$$

Man bezeichnet $b_{j,k}$ als *zweiten Fundamentaltensor der Differentialgeometrie* für die Fläche ∂D. Differenziert man die Gleichung $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, so erhält man $\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_j}, \nu \rangle = 0,\ j = 1, 2$. Somit gibt es Größen $b_j^k,\ j, k = 1, 2$, so daß die Beziehung

$$\frac{\partial \nu}{\partial u_j} = -b_j^l \frac{\partial \Psi}{\partial u_l}, \quad j = 1, 2, \tag{1.5}$$

erfüllt ist. (Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.) Setzt man (1.5) in (1.4) ein, so erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie von G die Gleichung

$$b_{j,k} = b_j^l g_{l,k}$$

und somit nach Multiplikation mit $g^{k,i}$ und Summation über k

$$b_j^i = b_{j,k} g^{k,i}. \tag{1.6}$$

Der Skalar

$$H := \frac{1}{2} b_i^i = \frac{1}{2} \left(b_1^1 + b_2^2 \right) \tag{1.7}$$

heißt *mittlere Krümmung*. H ist eine von der Wahl der lokalen Karte unabhängige Größe.

Wir benötigen auch die auf die Fläche ∂D transformierten Fundamentaltensoren für die Fläche ∂D_r sowie die transformierte mittlere Krümmung. Wir erhalten sie, indem wir stets Ψ durch $\Psi + r \circ \Psi$ bzw. ν durch $\nu(r)$ ersetzen. Wir benutzen für diese transformierten Tensoren die Bezeichnungen $g_{i,l}(r),\ G(r),\ g^{j,k}(r),\ b_{i,l}(r),\ b_l^k(r)$ bzw. für die Krümmung $H(r)$.

Der Oberflächengradient

Als *Oberflächengradienten* einer Funktion $\varphi \in C^1(\partial D)$ zum Rand ∂D bezeichnen wir die in lokalen Koordinaten durch

$$(\mathrm{Grad}\varphi) \circ \Psi = g^{j,k} \frac{\partial \varphi \circ \Psi}{\partial u_j} \frac{\partial \Psi}{\partial u_k}$$

gegebene Größe. Der Oberflächengradient ist von der Wahl der lokalen Karte unabhängig.

Sei $\overline{\varphi}$ eine auf ∂D_r definierte Funktion. $\mathrm{Grad}_r\overline{\varphi}$ bezeichne den Oberflächengradienten von $\overline{\varphi}$ an die Fläche ∂D_r. Der Oberflächengradient ist ein Element von $CT(\partial D_r)$. Wir transformieren den Oberflächengradienten vermöge der weiter oben eingeführten Abbildung $\mathcal{T}$ auf ∂D, setzen $\varphi := \mathcal{T}\overline{\varphi}$ und bezeichnen die transformierte Funktion mit $\mathrm{Grad}_T\varphi := \mathcal{T} \circ \mathrm{Grad}_r \mathcal{T}^{-1}\varphi$. Es gilt in lokalen Koordinaten

$$(\mathrm{Grad}_T\varphi) \circ \Psi = g^{i,k}(r) \frac{\partial(\varphi \circ \Psi)}{\partial u_i} \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_k}. \tag{1.8}$$

Sei $a = (a_1, ..., a_3) \in C^1(\partial D, I\!R^3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann setzen wir

$$\mathbf{Grad}a \ := \ (\mathrm{Grad}a_1, ..., \mathrm{Grad}a_3).$$

Induktiv definieren wir für $\varphi \in C^m(\partial D)$, $x \in \partial D$ eine $m-$lineare Form

$$(\mathrm{Grad}^m\varphi)(x) : I\!R^3 \times ... \times I\!R^3 \to \mathbb{C}$$

durch

$$(\mathrm{Grad}^m\varphi)(x)(\tau_1, ..., \tau_m) := \mathrm{Grad}^{m-1}(\left\langle \tau_1, \mathrm{Grad}\varphi \right\rangle)(x)(\tau_2, ..., \tau_m)$$

für $\tau_i \in I\!R^3$ und $m \geq 1$.

Integrale über ∂D

Gegeben sei der C^1-glatte Rand ∂D eines Gebietes $D \subset I\!R^3$ und ein endlicher isometrischer Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \Psi_i), i = 1, ..., N\}$ von ∂D. Man bezeichnet mit

$$J_i(v) := \sqrt{\det G(v)} = \left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_1}(v) \times \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_2}(v) \right|$$

die *Gram'sche Determinante* von ∂D bezüglich der Karte $\Psi_i : U_i \to V_i$. Durch $ds(y) := J_i(v)dv$ für $y = \Psi_i(v),\ v \in U_i$ wird das *natürliche Maß* (orientiert an der Einbettung in den $I\!R^3$) auf $V_i \subset \partial D$ gegeben.

Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{F}(\partial D)$ heißt *integrierbar*, wenn für alle $(U_i, V_i, \Psi_i) \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., N$ die Funktionen $(\varphi \circ \Psi_i)J_i$ über U_i integrierbar sind.

Man definiert Integrale über $V_i \subset \partial D$ durch

$$\int_{V_i} \varphi(y)ds(y) := \int_{U_i} (\varphi \circ \Psi_i)(v)J_i(v)dv.$$

Sei $V_i'' := V_i \setminus \left(\overline{\bigcup_{j>i} V_j}\right)$ und $U_i'' := \Psi_i^{-1}(V_i'')$. Integrale über ∂D werden definiert durch

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \varphi(y)ds(y) &:= \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i''} \varphi(y)ds(y) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i''} (\varphi \circ \Psi_i)(v)J_i(v)dv. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Der Flächeninhalt $s(\partial D)$ der Fläche ∂D wird gegeben durch

$$s(\partial D) = \int_{\partial D} ds(y).$$

Die Transformation von Integralen

Integrale über die Ränder ∂D_r der Gebiete D_r sollen im folgenden auf den Rand ∂D des Referenzgebietes D transformiert werden.

Sei ∂D der C^1-glatte Rand eines Gebietes D, $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \Psi_i), i = 1, ..., N\}$ ein endlicher isometrischer Atlas von ∂D, ρ hinreichend klein und $r \in C^1(\partial D, I\!R^3)$

mit $\| r \|_{\mathcal{A}} \leq \rho$. In Abschnitt 1.4 wird nachgewiesen, daß dann der Rand ∂D_r wieder C^1-glatt ist. Ein Atlas von ∂D_r wird durch die Karten $(U_{i,r}, V_{i,r}, \Psi_{i,r}), i = 1, ..., N$ mit $U_{i,r} := U_i$, $V_{i,r} := \{x + r(x), x \in V_i\}$ und $\Psi_{i,r} := \Psi_i + r \circ \Psi_i$ für $i = 1, ..., N$ gegeben.

Für die Gram'sche Determinante $J_i(r)$ von ∂D_r bezüglich einer Karte $(U_{r,i}, V_{r,i}, \Psi_{r,i})$ aus $\mathcal{A}_r$ erhalten wir

$$J_i(r, v) = \left| \frac{\partial(\Psi_i + r \circ \Psi_i)}{\partial u_1}(v) \times \frac{\partial(\Psi_i + r \circ \Psi_i)}{\partial u_2}(v) \right|, \quad v \in U_i. \tag{1.10}$$

Wir definieren $J_T(r) : \partial D \to \mathbb{C}$ durch

$$J_T(r, y) := \frac{\left| \frac{\partial(\Psi_i + r \circ \Psi_i)}{\partial u_1}(v) \times \frac{\partial(\Psi_i + r \circ \Psi_i)}{\partial u_2}(v) \right|}{\left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_1}(v) \times \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_2}(v) \right|}, \quad y \in V_i, v := \Psi_i^{-1}(y) \in U_i. \tag{1.11}$$

Man überzeuge sich durch eine elementare Rechnung davon, daß die rechte Seite von (1.11) nicht von der speziellen Karte Ψ_i abhängt. Die Funktion $J_T(r, .)$ ist somit wohldefiniert. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \int_{V_{r,i}} \varphi(y) ds(y) &= \int_{U_i} (\varphi \circ \Psi_{r,i})(v) J_{r,i}(v) dv \\ &= \int_{U_i} (\varphi \circ \Psi_{r,i})(v) \left\{ \frac{J_{r,i}(v)}{J_i(v)} \right\} J_i(v) dv \\ &= \int_{V_i} \varphi(y) J_T(r, y) ds(y). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Somit stellt $J_T(r, y)$ die *Jacobideterminante* der Transformation $x \mapsto x_r$ im Punkt y dar.

Weitere Normen auf $C^m(\partial D)$ und $C^{m,\alpha}(\partial D)$

Am Ende des Abschnitts 1.2 wurden Normen auf $C^m(\partial D)$ und $C^{m,\alpha}(\partial D)$ definiert. Diese nutzen lokale Karten und sind wesentlich kartenabhängig. Wir wollen hier kartenunabhängige Normen auf den angegebenen Räumen definieren.

Sei ∂D der C^m-glatte Rand eines Gebietes D. Der Raum $C^m(\partial D)$ wurde in Abschnitt 1.2 definiert. Wir definieren eine Norm darauf durch

$$\| \varphi \|_{C^m(\partial D)} := \sum_{j=0}^{m} \sup_{x\in\partial D} \left\{ \sup_{\tau_i \in \mathbb{R}^3, |\tau_i|\leq 1} \left| (\mathrm{Grad}^j \varphi)(x)(\tau_1, ..., \tau_j) \right| \right\}.$$

Für Gebiete mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand und $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial D)$ ist $(\mathrm{Grad}^m \varphi)(\tau_1, ..., \tau_m)$ eine hölderstetige Funktion. Eine Norm auf $C^{m,\alpha}(\partial D)$ wird gegeben durch

$$\| \varphi \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)} := \| \varphi \|_{C^m(\partial D)} + \sup_{\tau_i \in \mathbb{R}^3, |\tau_i|\leq 1} \| (\mathrm{Grad}^m \varphi)(.)(\tau_1, ..., \tau_m) \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}.$$

Die Räume $C^m(\partial D)$ und $C^{m,\alpha}(\partial D)$ werden mit den angegebenen Normen zu Banachräumen.

Die angegebene Norm auf $C^{m,\alpha}(\partial D)$ berücksichtigt die *natürliche* Metrik auf ∂D, welche durch die Einbettung in den $\mathbb{R}^3$ gegeben wird.

Die Normen $\| \, . \, \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)}$ und $\| \, . \, \|_{\mathcal{A}}$ sind äquivalent, d.h. es gibt Konstanten $C_{\mathcal{A},1}$ und $C_{\mathcal{A},2}$ mit

$$C_{\mathcal{A},1} \| \varphi \|_{\mathcal{A}} \quad \leq \quad \| \varphi \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)} \quad \leq \quad C_{\mathcal{A},2} \| \varphi \|_{\mathcal{A}} \tag{1.13}$$

für alle $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial D)$. Den Nachweis dieser Äquivalenz erhält man unmittelbar aus der Definition des Oberflächengradienten mit Hilfe der Gleichung

$$\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_k}, \mathrm{Grad}\varphi \rangle \quad = \quad \frac{\partial(\varphi \circ \Psi)}{\partial u_k}. \tag{1.14}$$

Die Konstanten $C_{\mathcal{A},1}$ und $C_{\mathcal{A},2}$ hängen nur von den Konstanten Γ_1 und Γ_2 des isometrischen Atlanten ab.

Zur Bezeichnung von Kugeln mit Radius ρ um den Ursprung von $C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)$ bei gegebenem Referenzgebiet D setzen wir

$$\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} := \left\{ r : \partial D \to \mathbb{R}^3, r \in C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3), \| r \|_{C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)} < \rho \right\}$$

und

$$\mathcal{C}_\rho^{m} := \left\{ r : \partial D \to \mathbb{R}^3, r \in C^{m}(\partial D, \mathbb{R}^3), \| r \|_{C^{m}(\partial D, \mathbb{R}^3)} < \rho \right\}.$$

Satz 1.1 *Seien* α, β *aus* $(0,1)$ *mit* $\alpha < \beta$. *Dann sind die Einbettungen*

$$C^{0,\beta}(\partial D) \to C(\partial D)$$

und

$$C^{0,\beta}(\partial D) \to C^{0,\alpha}(\partial D)$$

sowie

$$C^{1,\alpha}(\partial D) \to C^{0,\alpha}(\partial D)$$

kompakt.

Beweis: Zum Beweis siehe [CK1], Satz 2.5, für die ersten beiden Behauptungen. Die dritte Behauptung ergibt sich wie folgt:
Die Einbettung $C^{1,\alpha}(\partial D) \to C^{0,\beta}(\partial D)$ ist beschränkt, $C^{0,\beta}(\partial D) \to C^{0,\alpha}(\partial D)$ kompakt. Da die Komposition einer beschränkten Abbildung mit einer kompakten Abbildung kompakt ist, erhält man die Aussage. □

Die Oberflächendivergenz

Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und sei $a \in CT^1(\partial D)$ ein stetig differenzierbares Tangentialfeld. Dann gilt lokal die Darstellung

$$a \circ \Psi = a_1 \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \tag{1.15}$$

mit

$$a_1 = \frac{1}{\det G} \Big\langle a \circ \Psi, g_{22} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} - g_{12} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \Big\rangle \tag{1.16}$$

und

$$a_2 = \frac{1}{\det G} \Big\langle a \circ \Psi, g_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} - g_{12} \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \Big\rangle .$$

Die *Oberflächendivergenz* von a an die Fläche ∂D wird in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\mathrm{Div} a \circ \Psi := \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{\det G}\ \ a_1) \ \ + \frac{\partial}{\partial u_2} (\sqrt{\det G}\ \ a_2) \right\} . \tag{1.17}$$

Wir wollen analog zur Behandlung des Oberflächengradienten auch Oberflächendivergenzen auf den Flächen ∂D_r untersuchen und auf die Referenzfläche ∂D transformieren. Wir betrachten eine Schar von stetig differenzierbaren Tangentialfeldern $a(r) \in CT^1(\partial D_r)$ mit $r \in \mathcal{C}^2_\rho$. Die Formeln (1.15) und (1.16) nehmen dann die folgende Form an:

$$a(r) \circ \Psi = a_1(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_1} + a_2(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_2} \tag{1.18}$$

mit

$$a_1(r) = \frac{1}{\det G(r)} \Big\langle a(r) \circ \Psi, g_{22}(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_1} - g_{12}(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_2} \Big\rangle \tag{1.19}$$

und

$$a_2(r) = \frac{1}{\det G(r)} \Big\langle a(r) \circ \Psi, g_{11}(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_2} - g_{12}(r) \frac{\partial(\Psi + r \circ \Psi)}{\partial u_1} \Big\rangle.$$

Die Oberflächendivergenz von $a(r)$ an die Fläche ∂D_r wird lokal gegeben durch

$$\mathrm{Div}_r a(r) \circ \Psi := \frac{1}{\sqrt{\det G(r)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{\det G(r)} a_1(r)) \quad + \frac{\partial}{\partial u_2} (\sqrt{\det G(r)} a_2(r)) \right\}. \tag{1.20}$$

Die Oberflächendivergenz ist zunächst für Tangentialfelder definiert. Bei der in Kapitel 3 durchgeführten Fréchet Ableitung eines Tangentialfeldes nach der Funktion r gerät man aus der Menge der Tangentialfelder heraus. Wir setzen daher hier die Oberflächendivergenz auf die Menge aller stetig differenzierbaren Vektorfelder durch Einschub eines Projektionsoperators auf $CT^1(\partial D_r)$ fort.

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a \in C^1(\partial D, \mathbb{C}^3)$. Dann setzen wir

$$\mathrm{Div}_T a := \mathrm{Div}_r(Q(r)a)$$

mit $Q(r) : C^1(\partial D, \mathbb{C}^3) \to CT^1(\partial D_r)$:

$$Q(r)a := a(x) - \Big\langle \nu(r,x), a(x) \Big\rangle \, \nu(r,x).$$

Man berechnet $\mathrm{Div}_T a$ durch (1.20) mit a anstelle von $a(r)$ in (1.19), d.h. der Projektionsoperator taucht hier gar nicht mehr explizit auf.

Wir wollen zuletzt noch den Begriff der *schwachen Oberflächendivergenz* und einige Funktionenräume einführen, welche in den Kapitel 4 zugrundeliegenden Sätzen aus [CK2] benutzt werden. Sei dazu eine Funktion $a \in CT^1(\partial D)$ gegeben. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes erhält man nach kurzer Rechnung

$$\int_{\partial D} \mathrm{Div} a \, ds = 0.$$

Für stetig differenzierbare Funktionen $\varphi \in C^1(\partial D)$ erhalten wir aus der Definition die *Produktregel*

$$\mathrm{Div} \varphi a = \mathrm{Grad} \varphi \cdot a + \varphi \mathrm{Div} a$$

und damit

$$\int_{\partial D} \varphi \mathrm{Div} a \, ds = - \int_{\partial D} \mathrm{Grad} \varphi \cdot a \, ds. \tag{1.21}$$

Sei nun $a \in T(\partial D)$ eine integrierbare Funktion. Eine über ∂D integrierbare Funktion $\mathrm{Div} a \in \mathcal{F}(\partial D, \mathbb{C})$ heißt *schwache Oberflächendivergenz* von a, wenn (1.21) gilt für alle $\varphi \in C^1(\partial D)$.

Wir setzen

$$T_d(\partial D) := \{a \in CT(\partial D), \quad \mathrm{Div}\ a \text{ existiert mit } \mathrm{Div} a \in C(\partial D)\},$$

$$T_d^{0,\alpha}(\partial D) := \{a \in CT^{0,\alpha}, \quad \mathrm{Div}\ a \text{ existiert mit } \mathrm{Div} a \in C^{0,\alpha}(\partial D)\}.$$

Die Räume bilden mit den Normen

$$\| a \|_{T_d(\partial D)} := \| a \|_\infty + \| \mathrm{Div} a \|_\infty$$

und

$$\| a \|_{T_d^{0,\alpha}(\partial D)} := \| a \|_{C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3)} + \| \mathrm{Div} a \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

normierte Vektorräume. Es gilt

Satz 1.2 *Sei* $1 > \alpha > 0$. *Der Einbettungsoperator*

$$I^\alpha : T_d^{0,\alpha}(\partial D) \to T_d(\partial D)$$

ist kompakt.

Beweis: Siehe Theorem 6.15 von [CK2]. $\square$

1.4 Einige technische Details

In diesem Abschnitt werden einige technische Rechnungen zu den Abschnitten 1.2 und 1.3 ausgeführt.

Lemma 1.3 dient zum Nachweis der in Abschnitt 1.3 aufgestellten Behauptung, das dort zu einem Gebiet D mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand – $m \in I\!N$ – und einem Vektorfeld r aus $C^{m,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ definierte Gebiet D_r sei bei hinreichend kleiner Norm $\| r \|$ wieder ein Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand.

Lemma 1.3 *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet* $D \subset I\!R^3$ *mit* $C^{m,\alpha}-$*glattem Rand, ein endlicher isometrischer Atlas* $\mathcal{A} = \{ (U_i, V_i, \Psi_i),\ i = 1, ..., N \}$ *von* ∂D, *ein reeller Parameter* ρ *mit*

$$0 \ < \ \rho \ < \ \min \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3/5\}$$

und ein Vektorfeld r *aus* $C^{m,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ *mit*

$$\| r \circ \Psi_i \|_{C^{m,\alpha}(U_i, I\!R^3)} \leq \ \ \rho$$

für $i = 1, ..., N$. *Zur Abbildung* $x \mapsto x + r(x)$ *definieren wir eine* Kartentransformation *durch*

$$U_{r,i} := U_i, \quad V_{r,i} := \{x_r, x \in V_i\}, \Psi_{r,i} := \Psi_i + r \circ \Psi_i.$$

1) Dann gelten für die Konstanten

$$\Gamma_{\rho,4} := \min \{(\Gamma_2 - \rho)/\Gamma_1, 3/5\ \Gamma_3/\Gamma_0\}, \quad \Gamma_{\rho,5} := \max \{(\Gamma_1 + \rho)/\Gamma_2, (\Gamma_0 + 2\rho)\}/\Gamma_3$$

die Ungleichungen

$$\Gamma_{\rho,4}\ |x-y| \ \leq\ |x_r-y_r| \ \leq\ \Gamma_{\rho,5}\ |x-y| \tag{1.22}$$

für alle $x, y \in \partial D$. *Die Abbildung* $\partial D \to \partial D_r : x \mapsto x_r$ *ist also bijektiv und ein Homöomorphismus, wobei* ∂D *und* ∂D_r *als Teilmengen von* $I\!R^3$ *zu metrischen Räumen werden.*

2) Durch $\mathcal{A}_r := \{(U_{r,i}, V_{r,i}, \Psi_{r,i}), i = 1, ..., N\}$ *wird ein endlicher isometrischer Atlas von* ∂D_r *gegeben. Die den* Γ_j *entsprechenden Konstanten werden gegeben durch* $\Gamma_{\rho,0} := \Gamma_0 + 2\rho$, $\Gamma_{\rho,1} := \Gamma_1 + \rho$, $\Gamma_{\rho,2} := \Gamma_2 - \rho$ *und* $\Gamma_{\rho,3} := 3/5\ \Gamma_3$.

Beweis: I. Zunächst sind die Funktionen $\Psi_{r,i} = \Psi_i\ +\ r \circ \Psi_i, i = 1, ..., N$ wieder $m-$mal hölderstetig differenzierbar und wir erhalten unmittelbar

$$\| \Psi_{r,i} \|_{C^{m,\alpha}(U_i, I\!R^3)} \ \leq \| \Psi_i \|_{C^{m,\alpha}(U_i, I\!R^3)} + \| r \circ \Psi_i \|_{C^{m,\alpha}(U_i, I\!R^3)} \leq\ \Gamma_1\ +\ \rho \tag{1.23}$$

und

$$|\Psi_{r,i}(u) - \Psi_{r,i}(v)| \ \geq\ (\Gamma_2 - \rho)\ \ |u-v|\,, \quad u, v \in U_i. \tag{1.24}$$

II. Aus

$$\begin{aligned} |x_r - y_r| &\geq |x-y| - |r(x)| - |r(y)| \\ &\geq d(V_i', \partial D \setminus V_i)\ -\ 2 \max_{i=1,...,N} \| r \circ \Psi \|_{C^{m,\alpha}(U_i)} \\ &\geq \Gamma_3 - 2/5\ \Gamma_3 \ = \ 3/5\ \Gamma_3 \end{aligned}$$

für $x_r \in \partial D_r \setminus V_{r,i}$ und $y_r \in V'_{r,i}$ folgt

$$d(V'_{r,i}, \partial D_r \setminus V_{r,i}) \ \geq\ 3/5\ \Gamma_3. \tag{1.25}$$

III. Wir zeigen nun Teil 1) des Lemmas, indem wir die Existenz von Konstanten $\Gamma_{\rho,4}$ und $\Gamma_{\rho,5}$ nachweisen, mit denen (1.22) gilt. Gegeben seien x und y aus ∂D. Dann gibt es ein $j \in \{1, ..., N\}$ mit $x \in V_j'$. Betrachten wir den Fall $y \notin V_j$. Dann gilt $|x-y| \geq \Gamma_3$, $|x_r - y_r| \geq 3/5\ \Gamma_3$, $|x-y| \leq \Gamma_0$ und $|x_r - y_r| \leq \Gamma_0 + 2\rho$ und somit (1.22) in diesem Fall mit $\Gamma_{\rho,5} = (\Gamma_0 + 2\rho)/\Gamma_3$ und $\Gamma_{\rho,4} = 3/5\ \Gamma_3/\Gamma_0$. Im Fall $y \in V_j$ gilt für $u := \Psi_j^{-1}(x)$ und $v := \Psi_j^{-1}(y)$

$$\Gamma_2\ |u-v| \ \leq\ |x-y| \ \leq\ \Gamma_1\ |u-v|$$

und

$$(\Gamma_2 - \rho)\ |u - v| \ \leq \ |x_r - y_r| \ \leq \ (\Gamma_1 + \rho)\ |u - v|\,.$$

Daraus folgt (1.22) mit $\Gamma_{\rho,5} = (\Gamma_1 + \rho)/\Gamma_2$ und $\Gamma_{\rho,4} = (\Gamma_2 - \rho)/\Gamma_1$.

IV. Sicherlich sind die $V'_{r,i}$ und $V_{r,i}$ als Bilder offener Mengen unter einem Homöomorphismus offene Mengen. Sowohl $\{V_{r,i}, i = 1, ..., N\}$ als auch $\left\{V'_{r,i}, i = 1, ..., N\right\}$ bilden eine Überdeckung von ∂D_r.

V. Wir wollen nachweisen, daß Rang $(\mathbf{grad}\Psi_{r,i}) = 2$ gilt auf U_i für alle $i = 1, ..., N$. Angenommen es sei Rang $(\mathbf{grad}\Psi_{r,i}(v)) < 2$ für ein $v \in U_i$. Dann gilt für ein $\lambda \in I\!R$ die Beziehung $\partial\Psi_{r,i}/\partial u_1 = \lambda \cdot \partial\Psi_{r,i}/\partial u_2$. Setzen wir $v_1(\epsilon) := v + (\epsilon, 0)$ und $v_2(\epsilon) := v + (0, \lambda\epsilon)$, so gilt

$$\begin{aligned} |\Psi_{r,i}(v_1(\epsilon)) - \Psi_{r,i}(v_2(\epsilon))| &= \left| \frac{\partial\Psi_{r,i}}{\partial u_1}(v)\ \epsilon - \frac{\partial\Psi_{r,i}}{\partial u_2}(v)\ \lambda\epsilon + O(\epsilon^2) \right| \\ &= O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} |\Psi_{r,i}(v_1(\epsilon)) - \Psi_{r,i}(v_2(\epsilon))| &\geq (\Gamma_2 - \rho)\,|v_1(\epsilon) - v_2(\epsilon)| \\ &= (\Gamma_2 - \rho)\sqrt{1 + \lambda^2}\ \epsilon. \end{aligned}$$

VI. Aus den Aussagen in I., III., IV. und V. folgen nun die Behauptungen von Teil 2) des Lemmas.

□

Sei $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas zum Rand ∂D eines Gebietes D. Wir setzen

$$\rho_{\mathcal{A}} := \frac{1}{2}\ C_{\mathcal{A},1}\ \min\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3/5\}.$$

Dann gilt – vgl. (1.13) – für ein Vektorfeld $r \in \mathcal{C}^{m,\alpha}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ und $(U_i, V_i, \Psi_i) \in \mathcal{A}$ die Beziehung

$$\|\ r \circ \Psi_i\ \|_{C^{m,\alpha}(U_i)} \ \leq \ \frac{\|\ r\ \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)}}{C_{\mathcal{A},1}} \ < \ \min\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3/5\}$$

und nach dem vorausgehenden Lemma ist das Gebiet D_r wieder ein beschränktes Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand.

In Lemma 1.4 weisen wir nach, daß sich schon aus den Eigenschaften eines isometrischen Atlanten bestimmte Abschätzungen für die Gram'sche Determinante der lokalen Karten ergeben. Die entsprechende Aussage ohne eine explizite Form der Konstanten kann auch ohne Rechnung mit Hilfe eines Kompaktheitsargumentes gefolgert werden. Abschätzungen dieser Art werden etwa im dritten Kapitel benötigt, wenn wir die Fréchet Differenzierbarkeit der Normale an die Fläche ∂D_r zeigen wollen.

Lemma 1.4 *Sei D ein Gebiet mit $C^{1,\alpha}-$glattem Rand und $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D. Dann gilt*

$$J(v) \;=\; \left|\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}(v) \times \frac{\partial\Psi}{\partial u_2}(v)\right| \;\geq\; \frac{\Gamma_2^3}{\Gamma_1^2}\frac{\sqrt{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}}{\sqrt{2}}, \qquad v \in U \tag{1.26}$$

für alle Karten (U, V, Ψ) aus $\mathcal{A}$.

Beweis: Es gilt

$$\Gamma_2 \;\leq\; \left|\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}(v)\right| \;\leq\; \Gamma_1, \qquad v \in U \tag{1.27}$$

für alle $(U, V, \Psi) \in \mathcal{A}$. Sei

$$\lambda_\pm(v) := \pm\frac{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}(v)\right|}{\left|\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}(v)\right|}, \qquad v \in U.$$

Es gilt

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \;\leq\; |\lambda_\pm(v)| \;\leq\; \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}, \qquad v \in U. \tag{1.28}$$

Es folgen für $v_1(\epsilon) := v + (\epsilon, 0)$ und $v_2(\epsilon) := v + (0, \lambda_\pm(v)\epsilon)$ die Abschätzungen

$$\Gamma_2\epsilon\sqrt{1+\frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2}} \;\leq\; \Gamma_2\epsilon\sqrt{1+\lambda_\pm^2(v)} \;=\; \Gamma_2\left|(\epsilon,0)-(0,\lambda_\pm(v)\epsilon)\right|$$

$$\leq \quad |\Psi(v_1(\epsilon)) - \Psi(v_2(\epsilon))| \quad = \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)\epsilon - \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)\lambda_\pm(v)\epsilon + O(\epsilon^2) \right|$$

$$\leq \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v) - \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)\lambda_\pm(v) \right| \epsilon + O(\epsilon^2) \quad \leq \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v) \right| \left| \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)\right|} \mp \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)\right|} \right| \epsilon + O(\epsilon^2)$$

für $v \in U$. Daraus folgt

$$\left| \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)\right|} \mp \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)\right|} \right| \quad \geq \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2}\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}, \qquad v \in U$$

und somit

$$\begin{aligned} J(v) \quad &\geq \quad \Gamma_2^2 \left| \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(v)\right|} \times \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)}{\left|\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(v)\right|} \right| \\ &\geq \quad \frac{\Gamma_2^3}{\Gamma_1^2} \frac{\sqrt{\Gamma_1^2 + {\Gamma_2}^2}}{\sqrt{2}}, \qquad v \in U \end{aligned}$$

mit Hilfe elementargeometrischer Überlegungen.

□

1.5 Singuläre Integraloperatoren

Wir beschäftigen uns im folgenden mit singulären und schwach singulären Integralen und Integraloperatoren über Gebieten im $I\!R^2$ und Flächen im $I\!R^3$.

Es werden zunächst Notationen und Begriffe zusammengefaßt. Schließlich studieren wir das Verhalten von Cauchy Hauptwertintegralen über Flächen. Die diesbezügliche Aussage des Lemmas 1.5 wird für Satz 2.6 benötigt und mit diesem zusammen im dritten Kapitel der Arbeit für die Operatoren S, T und N benutzt.

Sei $U \subset I\!R^2$ offen. Wir setzen $\triangle_U := \{(u,u), u \in U\}$. Ein stetiger Kern

$$k : U \times U \setminus \triangle_U \to \mathbb{C}$$

heißt *schwach singulär*, wenn es Konstanten $c > 0$ und $\alpha \in (0,1]$ gibt, so daß gilt

$$|k(u,v)| \;\leq\; \frac{c}{|u-v|^{2-\alpha}} \qquad u \neq v, \;\; u,v \in U.$$

Schwache Singularitäten sind im Sinne eines uneigentlichen Integrals *integrierbare Singularitäten.* Der Kern k heißt *singulär*, wenn gilt

$$|k(u,v)| \;\leq\; \frac{c}{|u-v|^{2}} \qquad u \neq v, \;\; u,v \in U$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Singuläre Kerne sind im allgemeinen *nicht* im uneigentlichen Sinne *integrierbar.*

Sei ∂D eine C^2-glatte Fläche im $I\!R^3$. Ein stetiger Kern

$$K : \partial D \times \partial D \setminus \triangle_{\partial D} \to \mathbb{C}$$

heißt *schwach singulär* bzw. *singulär*, wenn gilt

$$|K(x,y)| \;\leq\; \frac{c}{|x-y|^{2-\alpha}} \qquad x \neq y, \;\; x,y \in \partial D$$

bzw.

$$|K(x,y)| \;\leq\; \frac{c}{|x-y|^{2}} \qquad x \neq y, \;\; x,y \in \partial D$$

mit Konstanten $c > 0$ und $\alpha \in (0,1]$. Gilt für einen schwach singulären Kern für alle $u \in U$ die Beziehung

$$\lim_{v \to u} |k(u,v)| = \infty,$$

so heißt er *echt* schwach singulär. Gibt es eine Konstante $\tilde{c} > 0$ mit

$$\frac{\tilde{c}}{|u-v|^{2}} \;\leq\; |k(u,v)| \qquad u \neq v, \;\; u,v \in U,$$

so heißt der Kern k *echt singulär* oder *stark singulär*. Entsprechende Bezeichungen gelten für die Kerne K.

Wir wollen singuläre und schwach singuläre Kerne K auf Flächen $\partial D \subset \mathbb{R}^3$ und ihnen entsprechende Kerne k auf Gebieten $U \subset \mathbb{R}^2$ studieren.

Sei $\mathcal{A} = \{ (U_i, V_i, \Psi_i),\ i = 1, ..., N \}$ ein endlicher isometrischer Atlas der C^1-glatten Fläche ∂D. Dann ist ein stetiger Kern $K : \partial D \times \partial D \setminus \triangle_{\partial D} \to \mathbb{C}$ genau dann singulär bzw. schwach singulär, wenn die durch

$$k_i(u, v) := K(\Psi_i(u), \Psi_i(v)) J_i(v)$$

für $i = 1, ..., N$ auf U_i definierten Kerne singulär bzw. schwach singulär sind. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften 1. und 2. isometrischer Atlanten.

Die Integrierbarkeit von $K(x, .)$ über ∂D ist nach den Bemerkungen aus Abschnitt 1.3 – Integrale über ∂D – per definitionem äquivalent zur Integrierbarkeit von $k_i(u, .)$ über U_i. Die schwach singulären Kerne sind somit stets integrierbar. Die Integrale über V_i können durch Integration der $k_i(u, .)$ berechnet werden.

Singuläre Kerne k bzw. K sind im allgemeinen nicht mehr integrierbar. In speziellen Fällen existiert allerdings der Grenzwert

$$w(u) := \lim_{\tilde{\epsilon} \to 0} w_{\tilde{\epsilon}}(u)$$

mit

$$w_{\tilde{\epsilon}}(u) := \int_{U \setminus \Omega_{\tilde{\epsilon}}(u)} k(u, v) dv, \quad u \in U$$

bzw.

$$W(x) := \lim_{\epsilon \to 0} W_\epsilon(x)$$

mit

$$W_\epsilon(x) := \int_{\partial D \setminus \Omega_\epsilon(x)} K(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Wir sagen dann, das Integral über $k(u, .)$ bzw. $K(x, .)$ existiere im Sinne eines *Cauchy Hauptwertes.*

Die Existenz eines Cauchy Hauptwert-Integrals $W(x)$ für $x \in V \subset \partial D$ ist nicht mehr äquivalent zur Existenz eines entsprechenden Cauchy Hauptwert-Integrals von $k(u, .)$ über U, da im allgemeinen die Grenzwerte

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{U \setminus \Psi^{-1}(\partial D \cap \Omega_\epsilon(x))} k(u, v) dv \tag{1.29}$$

und

$$\lim_{\tilde{\epsilon}\to 0}\int_{U\setminus\Omega_{\tilde{\epsilon}}(u)} k(u,v)dv \tag{1.30}$$

verschieden sind. Sei $x = \Psi(u)$ und $y = \Psi(v)$ mit $u, v \in U$ und $|y - x| = \epsilon$. Wir setzen $\sigma_\epsilon := \Psi^{-1}(\partial D \cap \Omega_\epsilon(x))$. Dann ist σ_ϵ für hinreichend kleine ϵ sternförmig bezüglich u, was man analog zur ersten Zeile von (1.32) einsehen kann. Sei $\theta := (v-u)/|v-u|$ und sei $\alpha(\epsilon, u, \theta) = |v-u|$ für v aus dem Rand von σ_ϵ. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\alpha(\epsilon,u,\theta)}{\epsilon} = \beta(u,\theta) \tag{1.31}$$

und $\beta(u, .)$ ist eine symmetrische stetige Funktion. Dies sieht man durch

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{|y-x|}{\epsilon} = \frac{|(\mathbf{grad}\Psi)(u)\circ(v-u)|}{\epsilon} + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \\ &= \frac{\alpha(\epsilon,u,\theta)}{\epsilon}\left|(\mathbf{grad}\Psi)(u)\circ\frac{(v-u)}{|v-u|}\right| + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

also

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\alpha(\epsilon,u,\theta)}{\epsilon} = \Big(|(\mathbf{grad}\Psi)(u)\circ\theta|\Big)^{-1}. \tag{1.33}$$

Betrachten wir einen singulären Kern der Form

$$k(u,v) = \frac{1}{\varrho^2}f(u,\theta)\varphi(v), \qquad \varrho = |u-v|, \theta = \frac{v-u}{|v-u|},$$

mit hölderstetigem φ und einer stetigen Funktion f, welche die Bedingung

$$\int_S f(u,\theta)dS = 0 \tag{1.34}$$

erfüllt. S bezeichne die Einheitssphäre. Dann gilt

$$\int_S f(u,\theta)\ln\alpha(\epsilon,u,\theta)dS = \int_S f(u,\theta)\ln\frac{\alpha(\epsilon,u,\theta)}{\epsilon}dS. \tag{1.35}$$

Ferner erhalten wir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{U\setminus\sigma_\epsilon}\varrho^{-2}f(u,\theta)\varphi(v)dv \;=\; \int_{\varrho>1}\varrho^{-2}f(u,\theta)\varphi(v)dv$$

$$+\;\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\alpha(\epsilon)<\varrho<1}\varrho^{-2}f(u,\theta)[\varphi(v)-\varphi(u)]dv \;+\; \varphi(u)\;\lim_{\epsilon\to 0}\int_S f(u,\theta)\ln\alpha(\epsilon,u,\theta)dS. \tag{1.36}$$

Die ersten beiden Integrale der rechten Seite stellen genau den gewöhnlichen Cauchy Hauptwert in diesem Fall dar. Es folgt

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{U\setminus\sigma_\epsilon}\varrho^{-2}f(u,\theta)\varphi(v)dv \;= \tag{1.37}$$

$$\lim_{\tilde\epsilon\to 0}\int_{U\setminus\Omega_{\tilde\epsilon}}\varrho^{-2}f(u,\theta)\varphi(v)dv \;-\; \varphi(u)\int_S f(u,\theta)\ln\beta(u,\theta)dS$$

Daraus ergibt sich das

Lemma 1.5 *Gegeben sei der C^2-glatte Rand ∂D eines beschränkten Gebietes D im $\mathbb{R}^3$ und ein singulärer Kern $K:\partial D\times\partial D\to\mathbb{C}$. Wir betrachten einen isometrischen Atlas $\mathcal{A}$ von ∂D. Sei (U,V,Ψ) eine lokale Karte aus $\mathcal{A}$ und $x=\Psi(u)\in V$. Kann man den Kern $k(u,v):=K(\Psi(u),\Psi(v))J(v)$ als Summe*

$$k(u,v)=k_0(u,v)+k_1(u,v)$$

eines Termes

$$k_0(u,v)=\frac{1}{\varrho^2}f(u,\theta)\varphi(v),\qquad \varrho=|u-v|\,,\theta=\frac{v-u}{|v-u|}$$

mit hölderstetigem φ und in θ antisymmetrischem stetigem f und eines schwach singulären Anteils $k_1(u,v)$ schreiben, so existiert das Cauchy Hauptwert-Integral

$$W(x):=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{V\setminus\Omega_\epsilon(x)}K(x,y)ds(y)$$

und es gilt die Identität

$$W(x)=\lim_{\tilde\epsilon\to 0}\int_{U\setminus\Omega_{\tilde\epsilon}(u)}k(u,v)dv.$$

Beweis: Zunächst wird $W(x)$ in der transformierten Form durch (1.29) gegeben. Nach (1.37) ist (1.29) Summe von

$$\lim_{\tilde{\epsilon}\to 0}\int_{U\setminus\Omega_{\tilde{\epsilon}}(u)} k_0(u,v)dv \quad + \quad \int_S f(u,\theta)\ln\beta(u,\theta)\; dS \tag{1.38}$$

mit einem schwach singulären Integral, wobei $\beta(u,\theta)$ durch (1.31) gegeben wird. Da β stetig symmetrisch und f stetig antisymmetrisch in θ sind, verschwindet das zweite Integral. Es folgt die Aussage des Lemmas. □

1.6 Differentiation von schwach singulären Integralen

Wir wollen Aussagen über die Regularität der Funktion

$$w(u) := \int_U k(u,v)dv$$

mit einem schwach singulären Kern k machen. Der folgende Satz spielt in Abschnitt 3.6 eine wichtige Rolle, wenn es um den Nachweis der Abbildungseigenschaften des in 3.1 zu definierenden akustischen Einfachschichtpotentialoperators S und seiner Fréchet Ableitungen in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen geht.

Satz 1.6 (1) *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet U im $\mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $U' \subset U$ mit $d(U',\mathbb{R}^2 \setminus U) = \delta > 0$. Der stetige Kern $k : U \times U \setminus \triangle_U \to \mathbb{C}$ sei schwach singulär und in der ersten Komponente stetig differenzierbar.*
(2) *Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial k}{\partial u_i}(u,.)$ mit $i = 1,2$ seien* gleichmäßig *für $u \in U'$ über die Menge U im Sinne eines Cauchy Hauptwertintegrals integrierbar, d.h. die Funktion*

$$g_\epsilon(u) := \int_{U\setminus\Omega_\epsilon(u)} \frac{\partial k}{\partial u_i}(u,v)dv, \quad u \in U$$

konvergiere für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig *auf U' gegen eine Funktion $g : U' \to \mathbb{C}$. Wir nutzen die übliche Bezeichnung*

$$\int_U \frac{\partial k}{\partial u_i}(u,v)dv := g(u).$$

(3) *Es gelte $k(u,v) = k_S(u,v) + \tilde{k}(u,v)$ mit einem Kern k_S, welcher die Bedingung*

$$k_S(u, u+w) = k_S(u, u-w) \tag{1.39}$$

für alle $u \in U$ und alle w mit hinreichend kleiner Norm $|w|$ erfüllt und einem Kern $\tilde{k}$, welcher der Abschätzung

$$\left|\tilde{k}(u,v)\right| \;\leq\; C\,|u-v|^{-\alpha}\,, \quad u, v \in U, u \neq v \tag{1.40}$$

mit einer Konstanten C und $\alpha \in [0,1)$ genügt. Dann *ist*

$$w(u) := \int_U k(u,v)dv, \;\; u \in U'$$

auf U' stetig differenzierbar nach u_i und es gilt für die Ableitung

$$\frac{\partial w}{\partial u_i}(u) = \int_U \frac{\partial k}{\partial u_i}(u,v)dv, \quad u \in U', \; i = 1, 2. \tag{1.41}$$

Beweis: Die Funktion

$$w_\epsilon(u) := \int_{U \setminus \Omega_\epsilon(u)} k(u,v)dv, \quad u \in U'$$

ist auf U' stetig nach u_i differenzierbar. Mit Hilfe klassischer Analysis schätzen wir den Differentialquotienten von w_ϵ ab. Wir erhalten die Beziehung

$$\frac{\partial w_\epsilon}{\partial u_i}(u) = \int_{U \setminus \Omega_\epsilon(u)} \frac{\partial k}{\partial u_i}(u,v)dv + \int_{S_\epsilon(u)} \Big\langle \nu_0(v), e_i \Big\rangle k(u,v)dS(v), \quad u \in U'. \tag{1.42}$$

Dabei ist ν_0 der nach außen weisende Normalenvektor an den Kreis $S_\epsilon(u)$, e_i der $i-$te Einheitsvektor und dS das Kurvenelement dieses Kreises. Wir zerlegen das Integral über $S_\epsilon(u)$ in

$$\int_{S_\epsilon(u)} \Big\langle \nu_0(v), e_i \Big\rangle k_S(u,v)dS(v) + \int_{S_\epsilon(u)} \Big\langle \nu_0(v), e_i \Big\rangle \tilde{k}(u,v)dS(v)$$

Wegen (1.39) ist der Integrand des ersten Integrals antisymmetrisch und das Integral verschwindet. Aus (1.40) erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_{S_\epsilon(u)} \Big\langle \nu_0(v), e_i \Big\rangle \tilde{k}(u,v)dS(v) \right| \;\leq\; 2\pi C \epsilon^{1-\alpha}$$

und somit die gleichmäßige Konvergenz des zweiten Integrals gegen 0. Die Aussage des Satzes folgt nun mit Hilfe klassischer Konvergenzsätze. □

Kapitel 2

Abbildungseigenschaften singulärer Integraloperatoren

Ziel des zweiten Kapitels ist es, drei Sätze über die Abbildungseigenschaften schwach singulärer bzw. singulärer Integraloperatoren bereitzustellen. Dies sind die Sätze 2.4, 2.5 und 2.6. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Sätze 2.8 und 2.11 aus [CK1] und einen Spezialfall des Satz 4.2 aus [MP]. Die hier angegebenen und bewiesenen Sätze gehen insofern über die zitierten hinaus, als die auftretenden Konstanten mit Hilfe von Karten genauer bestimmt und in den Beweisen explizit ausgerechnet werden. Es gehen dabei genau die in Abschnitt 1.2 eingeführten Konstanten eines isometrischen Atlanten ein.

Mit Hilfe dieser Sätze erhalten wir in Kapitel 3 Aussagen für Scharen von Integraloperatoren, welche in gleichmäßiger Weise den Voraussetzungen des jeweiligen Satzes genügen.

2.1 Singuläre Integraloperatoren über Gebiete im $\mathbb{R}^2$

Wir beschäftigen uns zunächst mit Integraloperatoren über Gebieten im $\mathbb{R}^2$. Mit Satz 2.1 bereiten wir Satz 2.4 des zweiten Abschnitts vor. Satz 2.2 enthält einen wesentlichen Schritt des Beweises von Satz 2.3 und ist das zweidimensionale Analogon des Satzes 2.5. Allerdings kann der Beweis des Satzes 2.5 wegen der schon in Abschnitt 1.5 angesprochenen Schwierigkeiten mit Cauchy-Hauptwerten nicht auf Satz 2.2 gegründet werden, die entsprechenden Zerlegungen müssen auf den Gebietsrändern selbst noch einmal nachvollzogen werden. Satz 2.3 enthält die wesentliche Analysis echt singulärer Integraloperatoren über ebene Gebiete und bildet das Fundament von Satz 2.6.

Satz 2.1 *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet U im $\mathbb{R}^2$, eine offene Teilmenge U' von U, $M \in \mathbb{N}$ und ein reeller Parameter $\alpha \in (0,1)$. Sei γ_0 eine Konstante mit $|u-v| \leq \gamma_0$ für alle $u, v \in U$. Wir betrachten einen stetigen Kern*

$$k : U' \times U \setminus \triangle_U \to \mathbb{C},$$

der mit einer Konstanten $\mathbf{c}_1$ den Abschätzungen

$$|k(u,v)| \leq \mathbf{c}_1 \; |u-v|^{\alpha-2} \tag{2.1}$$

und

$$|k(u_1,v) - k(u_2,v)| \leq \mathbf{c}_1 \sum_{j=1}^{M} |u_1 - v|^{\alpha-2-j} \, |u_1 - u_2|^j \tag{2.2}$$

für alle $u_1, u_2 \in U'$, $v \in U$ mit $2\,|u_1 - u_2| \leq |u_1 - v|$ genüge. Dann ist für $\varphi \in C(U)$ die Funktion

$$w(u) := \int_U k(u,v)\varphi(v)dv, \quad u \in U' \tag{2.3}$$

$\alpha-$hölderstetig auf U' und es gilt

$$\| \, w \, \|_{C^{0,\alpha}(U')} \leq \Lambda_1 \, \mathbf{c}_1 \, \| \, \varphi \, \|_{C(U)}, \tag{2.4}$$

mit einer Konstanten Λ_1, welche nur von γ_0, M und vom Parameter α abhängt.

Beweis: Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |w(u)| &\leq \mathbf{c}_1 \, \| \, \psi \, \|_{C(U)} \int_U |u-v|^{\alpha-2} \, dv \\ &\leq 2\pi \, \mathbf{c}_1 \, \| \, \psi \, \|_{C(U)} \int_0^{\gamma_0} r^{\alpha-1} dr \\ &= c_1 \, \mathbf{c}_1 \, \| \, \psi \, \|_{C(U)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$c_1 := 2\pi \frac{\gamma_0^\alpha}{\alpha}. \tag{2.6}$$

Wir wollen nun die Gültigkeit der Ungleichung

$$|w(u_1) - w(u_2)| \ \leq \ c' \, \mathbf{c}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(U)} |u_1 - u_2|^\alpha \tag{2.7}$$

mit einer geeigneten Konstanten c' nachweisen. Sei $\delta > 0$ eine reelle Zahl mit $2\delta < \gamma_0$ und $r := |u - v|$. Es gilt

$$\int_{\Omega_{4\delta}(u)} \frac{1}{|u-v|^{2-\alpha}} dv \ = \ 2\pi \int_0^{4\delta} \frac{1}{r^{1-\alpha}} dr \ = \ 2\pi \frac{4^\alpha}{\alpha} \delta^\alpha \ = c_2 \delta^\alpha \tag{2.8}$$

mit

$$c_2 := 2\pi \ \frac{4^\alpha}{\alpha} \tag{2.9}$$

und

$$\sum_{j=1}^{M} \delta^j \, 2\pi \int_{2\delta}^{\gamma_0} r^{\alpha-1-j} dr \ \leq \ \left\{ 4\pi \sum_{j=1}^{M} \frac{2^{\alpha-j}}{j-\alpha} \right\} \delta^\alpha \ = \ c_3 \, \delta^\alpha \tag{2.10}$$

mit

$$c_3 := 4\pi \ \sum_{j=1}^{M} \frac{2^{\alpha-j}}{j-\alpha}. \tag{2.11}$$

Sei nun $\delta := |u_1 - u_2|$. Mit Hilfe von (2.1) und (2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{U \cap \Omega_{2\delta}(u_1)} [k(u_1, v) - k(u_2, v)] \, \varphi(v) dv \right| \\
&\leq \int_{U \cap \Omega_{4\delta}(u_1)} |k(u_1, v)\varphi(v)| \, dv + \int_{U \cap \Omega_{4\delta}(u_2)} |k(u_2, v)\varphi(v)| \, dv \\
&\leq \ 2 \ \ \mathbf{c}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(U)} \left| \int_{\Omega_{4\delta}(u)} \frac{1}{|u-v|^{2-\alpha}} dv \right| \qquad (2.12) \\
&= 2 \, c_2 \, \mathbf{c}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(U)} \quad |u_1 - u_2|^\alpha .
\end{aligned}$$

Analog folgt mit Hilfe der Gleichungen (2.2) und (2.10) und der Beschränktheit des Gebietes U:

$$\begin{aligned} &\int_{U\setminus\Omega_{2\delta}(u_1)} [k(u_1,v)-k(u_2,v)]\,\varphi(v)dv \\ &\qquad\leq \quad \mathbf{c}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(G)} \sum_{j=1}^{M} \delta^j \; 2\pi \int_{2\delta}^{\gamma_1} r^{\alpha-1-j} dr \\ &\qquad\leq \; c_3\, \mathbf{c}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(G)} |u_1-u_2|^{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Aus den Gleichungen (2.12) und (2.13) folgt nun unmittelbar die Hölderabschätzung (2.7) mit $c' := 2c_2 + c_3$ und somit die Hölderstetigkeit von w auf U' und die Abschätzung (2.4) mit der durch $\Lambda_1 := c_1 + 2c_2 + c_3$ gegebenen Konstanten. □

Der Beweis des folgenden Satzes nutzt im wesentlichen dieselben Techniken wie der Beweis von Satz 2.1. Er wird zum Beweis des Satzes 2.3 benötigt.

Satz 2.2 *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet U im $\mathbb{R}^2$, eine offene Teilmenge U' aus U, $M \in \mathbb{N}$ und ein reeller Parameter $\alpha \in (0,1)$. Sei γ_0 eine Konstante mit $|u-v| \leq \gamma_0$ für alle $u, v \in U$. Wir betrachten einen stetigen Kern*

$$k : U' \times U \setminus \triangle_U \to \mathbb{C},$$

der mit einer Konstanten $\mathbf{c}_2$ den Abschätzungen

$$|k(u,v)| \;\leq\; \mathbf{c}_2 \;|u-v|^{-2} \tag{2.14}$$

und

$$|k(u_1,v)-k(u_2,v)| \;\leq\; \mathbf{c}_2 \sum_{j=1}^{M} |u_1-v|^{-2-j}\,|u_1-u_2|^{j} \tag{2.15}$$

für alle $u_1, u_2 \in U', v \in U$ mit $2\,|u_1-u_2| \;\leq\; |u_1-u_2|$ genüge. Sei ferner

$$\left| \int_{U\setminus\Omega_{2\delta}(u)} k(u,v)dv \right| \;\leq\; \mathbf{c}_2 \tag{2.16}$$

für alle $\epsilon > 0$ und $u \in U'$. Dann ist für $\varphi \in C^{0,\alpha}(U)$ die Funktion

$$w(u) := \int_U k(u,v)\,[\varphi(v)-\varphi(u)]\,dv, \quad u \in U \tag{2.17}$$

α-hölderstetig auf U' und es gilt die Ungleichung

$$\| \, w \, \|_{C^{0,\alpha}(U')} \;\leq\; \Lambda_2 \, \mathbf{c}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \tag{2.18}$$

mit einer Konstanten Λ_2, welche nur von γ_0, M und vom Parameter α abhängt.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |w(u)| \;&\leq\; \mathbf{c}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \int_U \frac{1}{|u-v|^{2-\alpha}} dv \\ &\leq\; c_1 \, \mathbf{c}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei c_1 durch (2.6) gegeben wird. Wir wollen für $u_1, u_2 \in U'$ die Ungleichung

$$|w(u_1) - w(u_2)| \;\leq\; c' \, \mathbf{c}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \, |u_1 - u_2|^{\alpha} \tag{2.20}$$

mit einer geeigneten Konstanten c' nachweisen. Sei nun $\delta := |u_1 - u_2|$. Mit Hilfe von (2.14) und (2.8) und der Ungleichung

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \;\;\leq\;\; \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \, |u - v|^{\alpha} \tag{2.21}$$

für die hölderstetige Funktion φ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| \int_{U \cap \Omega_{4\delta}(u_1)} \Big[k(u_1, v) \, [\varphi(v) - \varphi(u_1)] - k(u_2, v) \, [\varphi(v) - \varphi(u_2)] \Big] dv \right| \\ &\leq \int_{U \cap \Omega_{8\delta}(u_1)} |k(u_1, v)| \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \, |u_1 - v|^{\alpha} \, dv \\ &\qquad\qquad + \int_{U \cap \Omega_{8\delta}(u_2)} |k(u_2, v)| \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \, |u_2 - v|^{\alpha} \, dv \\ &\leq\; 2^{\alpha+1} \, c_2 \, \mathbf{c}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \, |u_1 - u_2|^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

wobei c_2 die in (2.9) definierte Konstante ist. Es gilt ferner

$$\begin{aligned} &\left| \int_{U \setminus \Omega_{4\delta}(u_1)} \Big[k(u_1, v) \, [\varphi(v) - \varphi(u_1)] - k(u_2, v) \, [\varphi(v) - \varphi(u_2)] \Big] dv \right| \\ &\qquad \leq \;\; \left| \int_{U \setminus \Omega_{4\delta}(u_1)} \Big[k(u_1, v) - k(u_2, v) \Big] \, [\varphi(v) - \varphi(u_2)] \, dv \right| \\ &\qquad\qquad\qquad + \;\; \left| \int_{U \setminus \Omega_{4\delta}(u_1)} k(u_1, v) \, [\varphi(u_1) - \varphi(u_2)] \, dv \right|. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wir nutzen für den ersten Term der rechten Seite von (2.23) die Abschätzungen (2.21), (2.15) und Gleichung (2.10) für $\delta := |u_1 - u_2|$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{U\setminus\Omega_{4\delta}(u_1)} |k(u_1,v) - k(u_2,v)|\,|\varphi(v) - \varphi(u_2)|\,dv \\
\leq\ & \int_{U\setminus\Omega_{2\delta}(u_2)} |k(u_1,v) - k(u_2,v)|\,|\varphi(v) - \varphi(u_2)|\,dv \\
\leq\ & \mathbf{c}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \left\{ \sum_{j=1}^{M} |u_1 - u_2|^j \ 2\pi \int_{2\delta}^{\gamma_0} r^{\alpha-1-j} dr \right\} \\
\leq\ & c_3\, \mathbf{c}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \quad |u_1 - u_2|^{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

mit der durch (2.11) gegebenen Konstanten c_3. Der zweite Term der rechten Seite von (2.23) wird mit Hilfe von (2.21) und (2.16) durch

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{U\setminus\Omega_{4\delta}(u_1)} k(u_1,v)\,[\varphi(u_1) - \varphi(u_2)]\,dv \right| \\
\leq\ & \mathbf{c}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \quad |u_1 - u_2|^{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

abgeschätzt. Aus den Ungleichungen (2.22), (2.24) und (2.25) ergibt sich nun unmittelbar die Abschätzung (2.20) mit $c' = 2^{\alpha+1}c_2 + c_3 + 1$ und daraus zusammen mit (2.19) die Abschätzung (2.18) mit der Konstanten $\Lambda_2 := c_1 + 2^{\alpha+1}c_2 + c_3 + 1$.

□

Wir beschäftigen uns nun mit echt singulären Integralen über einem beschränkten Gebiet U im $\mathbb{R}^2$. Sei $|u-v| \ \leq \ \gamma_0$ für alle $u, v \in U$. Wir nutzen die Bezeichnungen

$$\varrho := |u-v|\,, \quad \theta := \frac{v-u}{|v-u|}$$

für $u, v \in U$. S bezeichnet den Rand des Einheitskreises bzw. der Einheitskugel. Betrachten wir nun einen echt singulären Kern k der Form

$$k(u,v) = \varrho^{-2} f(u,\theta), u \neq v, \quad u, v \in U \tag{2.26}$$

und den zugehörigen singulären Integraloperator

$$v(u) := \int_U k(u,v)\varphi(v)dv, \quad u \in U. \tag{2.27}$$

Die Funktion $f : U \times S \to \mathbb{C}$ bezeichnet man als die *Charakteristik* des singulären Integrals (2.27) (vgl. [MP]).

Satz 2.3 *Die Charakteristiken $f(u,\theta)$ seien stetig differenzierbar nach u und θ. Die Funktionen f und ihre ersten Ableitungen seien durch $\mathbf{c}_3$ beschränkt auf $U \times S$. Es gelte für alle $u \in U$*

$$\int_S f(u,\theta)dS = 0. \tag{2.28}$$

Wir betrachten ein Gebiet $U' \subset U$ mit $d(U', \mathbb{R}^2 \setminus U) \geq \delta$. Die Dichte φ des singulären Integraloperators (2.27) *sei gleichmäßig hölderstetig auf U. Dann existiert das Integral* (2.27) *in folgendem Sinne: die Funktionen*

$$w_\epsilon(u) := \int_{U \setminus \Omega_\epsilon(x)} k(u,v)\varphi(v)dv, \quad u \in U \tag{2.29}$$

streben für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig in U' gegen einen Grenzwert $w(u)$. Die Funktion w ist hölderstetig und es gilt die Ungleichung

$$\| \, w \, \|_{C^{0,\alpha}(U')} \ \leq \ \Lambda_3 \, \mathbf{c}_3 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \tag{2.30}$$

mit einer Konstanten Λ_3, die nur von den Parametern α, γ_0 und δ abhängt.

Beweis: I. Wir wählen $\epsilon < \delta$ und zerlegen das Integral (2.29) mit Hilfe der Beziehung (2.28) in

$$w_\epsilon(u) = w_{1,\epsilon}(u) + \varphi(u) w_{2,0}(u) \tag{2.31}$$

mit

$$w_{1,\epsilon}(u) := \int_{U \setminus \Omega_\epsilon} \varrho^{-2} f(u,\theta)\,[\varphi(v) - \varphi(u)]\,dv, \quad u \in U'$$

und

$$w_{2,0}(u) := \int_{U \setminus \Omega_\delta(u)} \varrho^{-2} f(u,\theta) dv, \quad u \in U'.$$

II. Wir behandeln zunächst $w_{1,\epsilon}$. Wir weisen nach, daß der Kern

$$k(u,v) = \varrho^{-2} f(u,\theta)$$

von w_1 die Bedingungen des Satzes 2.2 erfüllt. Da f beschränkt ist, gilt die Abschätzung (2.14) mit $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3$. Die Ungleichung (2.15) mit $M = 1$ und $\mathbf{c}_2 = (10 + 2\gamma_0)\mathbf{c}_3$ ergibt sich wegen der Differenzierbarkeit von f mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differential- und Integralrechnung – vgl. Gleichung (2.36). Die Ungleichung (2.16) mit der Konstanten $\mathbf{c}_2 = 2\pi\ \mathbf{c}_3\ (\ln \gamma_0 - \ln \delta)$ ist wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{U \setminus \Omega_\epsilon(u)} k(u,v) dv \right| &= \left| \int_{U \setminus \Omega_\delta(u)} k(u,v) dv \right| \\ &\leq 2\pi\ \mathbf{c}_3 \int_\delta^{\gamma_0} \frac{1}{\varrho} d\varrho \\ &= 2\pi\ \mathbf{c}_3\ (\ln(\gamma_0) - \ln(\delta)) \end{aligned} \tag{2.32}$$

für $\delta \geq \epsilon > 0$ eine Folge der Bedingung (2.28). Die durch

$$w_{1,0}(u) := \int_U \varrho^{-2} f(u,\theta)\,[\varphi(v) - \varphi(u)]\,dv, \quad u \in U'$$

definierte Funktion existiert als uneigentliches Integral und wir haben die Konvergenz $w_{1,\epsilon}(u) \to w_{1,0}(u), \epsilon \to 0$ gleichmäßig auf U'. Nach Satz 2.2 gilt die Ungleichung

$$\| w_{1,0} \|_{C^{0,\alpha}(U')} \leq c_4\ \mathbf{c}_3\ \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(U)} \tag{2.33}$$

mit

$$c_4 = \Lambda_2\ [\ 10 + 2\gamma_0\ +\ 2\pi\ (\ln \gamma_0 - \ln \delta)\ ]. \tag{2.34}$$

III. Wir behandeln $w_{2,0}$. Aus der Abschätzung (2.32) folgt für den Ausdruck $\varphi \cdot w_{2,0}$ die Ungleichung

$$|\varphi(u) \cdot w_{2,0}(r,u)| \;\leq\; 2\pi\ (\ln(\gamma_0) - \ln(\delta))\ \mathbf{c}_3 \parallel \varphi \parallel_{C(U)}, \qquad u \in U'. \tag{2.35}$$

Der Kern $k(u,v)$ ist für $u \neq v$ stetig nach u differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dk}{du_i}(u,v) &= -2\frac{u_i - v_i}{|u-v|^4} f(u,\theta(u,v)) \\ &\quad + \frac{1}{|u-v|^2}\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_i}(u,\theta(u,v)) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \theta}(u,\theta), \frac{d\theta}{du_i}(u,v)\right\rangle \right\}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Es folgt die Differenzierbarkeit von $w_{2,0}$. Die Form

$$\frac{dw_{2,0}}{du_i}(u) \;=\; \int_{U\setminus\Omega_\delta(u)} \frac{dk}{du_i}(u,v)dv \;+\; \int_{S_\delta(u)} \langle e_i, \nu_0(v)\rangle k(r,u,v)dS(v)$$

der Ableitung errechnet man mit Hilfe klassischer Analysis unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes der Differential- und Integralrechnung – vgl. Gleichung (1.42). Wieder mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgt nun

$$\begin{aligned} |w_{2,0}(u_1) - w_{2,0}(u_2)| &\leq \left[2\pi\gamma_0^2 \left\{ \sup_{u\in[u_1,u_2],|u-v|\geq\delta} |(\mathrm{grad}k)(u,v)| \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\pi\delta \left\{ \sup_{u\in[u_1,u_2],|u-v|=\delta} |k(u,v)| \right\} \right] |u_1 - u_2| \\ &\leq \left(2\pi\gamma_0^2 \left\{ \frac{5}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^2} \right\} + 2\pi\ \frac{1}{\delta} \right) \\ &\qquad |u_1 - u_2|^{1-\alpha} \cdot \mathbf{c}_3 \cdot |u_1 - u_2|^\alpha \\ &\leq 2\pi \left(\gamma_0^{3-\alpha} \left\{ \frac{5}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^2} \right\} + \frac{1}{\delta}\gamma_0^{1-\alpha} \right) \mathbf{c}_3\ |u_1 - u_2|^\alpha . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Wir nutzen ferner die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\varphi(u_1)w_{2,0}(u_1) - \varphi(u_2)w_{2,0}(u_2)| &\leq |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\,|w_{2,0}(u_1)| \\ &\quad + |w_{2,0}(u_1) - w_{2,0}(u_2)|\,|\varphi(u_2)| \end{aligned} \tag{2.38}$$

und erhalten

$$\parallel \varphi \cdot w_{2,0} \parallel_{C^{0,\alpha}(U')} \;\leq\; c_5\, \mathbf{c}_3 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)}$$

mit

$$c_5 \;:=\; 4\pi\,[\ln(\gamma_0) - \ln(\delta)] \;+\; 2\pi\Big(\gamma_0^{3-\alpha}\,\left\{\frac{2}{\delta^5} + \frac{1}{\delta^2}\right\} \;+\; \frac{1}{\delta}\gamma_0^{1-\alpha}\Big). \tag{2.39}$$

Somit strebt die Funktion w_ϵ für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig in U' gegen den Grenzwert $w := w_{1,0} + \varphi \cdot w_{2,0}$ und es gilt die Abschätzung

$$\| \, w \, \|_{C^{0,\alpha}(U')} \;\leq\; \Lambda_3 \, c_0 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)}$$

mit der Konstanten

$$\Lambda_3 \;:=\; (c_4 + c_5).$$

□

2.2 Singuläre Integraloperatoren über Ränder von Gebieten im $I\!R^3$

Der folgende Satz beschäftigt sich mit einem schwach singulären Integraloperator über den Rand ∂D eines Gebiet im $I\!R^3$, dessen Kern einer zusätzlichen Bedingung (2.41) genügt. Es handelt sich im Prinzip um Satz 2.8 aus [CK1].

Satz 2.4 *Sei ∂D der C^1-glatte Rand eines beschränkten Gebietes D im $I\!R^3$ und $\alpha \in (0,1)$ eine reelle Zahl. Wir betrachten einen stetigen Kern*

$$K : \partial D \times \partial D \setminus \triangle_{\partial D} \to \mathbb{C},$$

der mit einer Konstanten $\mathbf{C}_1$ den Abschätzungen

$$|K(x,y)| \;\leq\; \mathbf{C}_1 \; |x-y|^{\alpha-2} \tag{2.40}$$

und

$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \;\leq\; \mathbf{C}_1 \, \sum_{j=1}^{M} |x_1 - y|^{\alpha-2-j} \, |x_1 - x_2|^j \tag{2.41}$$

für alle $x, y, x_1, x_2 \in \partial D$ mit $x \neq y$ und $2\,|x_1 - x_2| \;\leq\; |x_1 - y|$ genüge. Dann ist für $\varphi \in C(\partial D)$ die Funktion

$$W(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \partial D \tag{2.42}$$

$\alpha-$hölderstetig auf ∂D und es gilt

$$\| W \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \;\leq\; \Lambda_4 \, \mathbf{C}_1 \, \| \varphi \|_{C(\partial D)} \tag{2.43}$$

mit einer Konstanten Λ_4, welche nur vom Parameter α, von M und von den Konstanten $\Gamma_0, ..., \Gamma_3$ eines isometrischen Atlanten von ∂D abhängt.

Beweis: I. Sei $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \Psi_i), i = 1, ..., N\}$ ein endlicher isometrischer Atlas von ∂D und V_i' die den Mengen V_i in Abschnitt 1.2 zugeordneten offenen Mengen mit $\overline{V_i'} \subset V_i$. Zum Beweis des Satzes reicht es aus, die jeweiligen Aussagen für $W|_{V_i'}$ für ein beliebiges $i \in \{1, ..., N\}$ zu zeigen. Zur Abkürzung setzen wir $\Psi = \Psi_i, U = U_i, V = V_i$ und $U' = U_i'$. Wir zerlegen $W|_{V'} = W_1 + W_2$ mit

$$W_1(x) \;:=\; \int_{\partial D \setminus V} K(x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in V'$$

und

$$W_2(x) \;:=\; \int_V K(x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in V'.$$

II. Wir behandeln W_1. Aus den Bedingungen (2.40) und (2.41) folgen die Abschätzungen

$$|W_1(x)| \;\leq\; \Gamma_3^{\alpha-2} \; s(\partial D) \; \mathbf{C}_1 \; \| \varphi \|_{C(\partial D)}$$

und

$$|W_1(x_1) - W_1(x_2)| \;\leq\; \left(\sum_{j=1}^{M} \Gamma_3^{\alpha-2-j} \Gamma_0^{j-\alpha} \right) \; s(\partial D) \; \mathbf{C}_1 \; \| \varphi \|_{C(\partial D)} \; |x_1 - x_2|^\alpha$$

für $x_1, x_2, x \in V'$ mit $2\,|x_1 - x_2| \;\leq\; \Gamma_3$ mit dem durch $s(\partial D)$ bezeichneten Flächeninhalt der Fläche ∂D. Für $2\;|x_1 - x_2| \;> \Gamma_3$ erhalten wir

$$|W_1(x_1) - W_2(x_2)| \;\leq\; 2^{1+\alpha} \; \Gamma_3^{\alpha-2} \Gamma_2^{-\alpha} \; s(\partial D) \; \mathbf{C}_1 \; \| \varphi \|_{C(\partial D)} \; |x_1 - x_2|^\alpha .$$

Es folgt die Hölderstetigkeit von W_1 auf V' und die Abschätzung

$$\| W_1 \|_{C^{0,\alpha}(V')} \;\leq\; c_6 \; \mathbf{C}_1 \; \| \varphi \|_{C(\partial D)} \tag{2.44}$$

mit

$$c_6 = \left\{ \Gamma_3^{\alpha-2} + \; 2^{1+\alpha} \Gamma_3^{\alpha-2} \Gamma_2^{-\alpha} + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_3^{\alpha-2-j} \Gamma_0^{j-\alpha} \right\} \; s(\partial D).$$

III. Betrachten wir nun W_2. Wir transformieren das Integral auf U. Sei

$$k(u,v) := K(\Psi(u), \Psi(v)J(v) \qquad \text{und} \qquad \psi(v) := (\varphi \circ \Psi)(v).$$

Es gilt $W_2(x) = w(\Psi^{-1}(x))$ mit

$$w(u) \ := \ \int_U k(u,v)\psi(v)dv, \quad u \in U'.$$

Da $|J(v)| \ \leq \ \Gamma_1^2$ gilt für $v \in U$, erhalten wir mit Hilfe der Eigenschaften des isometrischen Atlanten aus (2.40) und (2.41) die Abschätzungen (2.1) und (2.2) aus Satz 2.1 für alle $u_1, u_2 \in U'$, $v \in U$ mit $2\,|u_1 - u_2| \ \leq \ |u_1 - v|$ mit der Konstanten

$$\mathbf{c}_1 := \mathbf{C}_1\, \Gamma_1^2 \ \max\Big\{\Gamma_2^{\alpha-2-j} \cdot \Gamma_1^j | j = 0, ..., M\Big\}.$$

Aus der Abschätzung II. des isometrischen Atlanten erhält man $|u - v| \ \leq \ \gamma_0$ für alle $u, v \in U$ mit der Konstanten $\gamma_0 := \Gamma_0/\Gamma_2$. Satz 2.1 liefert nun die Hölderstetigkeit von w und die Abschätzung

$$\parallel w \parallel_{C^{0,\alpha}(U')} \ \leq \ \Lambda_1\, \mathbf{c}_1 \parallel \psi \parallel_{C(U)}$$

mit der dort gegebenen Konstanten Λ_1. Wir erhalten daraus unter Ausnutzung der Abschätzungen eines isometrischen Atlanten die Hölderstetigkeit von W_2 und

$$\parallel W_2 \parallel_{C^{0,\alpha}(V')} \ \leq \ c_7\, \mathbf{C}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(\partial D)} \tag{2.45}$$

mit

$$c_7 = (1 + \Gamma_2^{-\alpha})\, \Gamma_1^2 \ \max\Big\{\Gamma_2^{\alpha-2-j} \cdot \Gamma_1^j | j = 0, ..., M\Big\}\ \Lambda_1 \ .$$

IV. Aus (2.44) und (2.45) folgt nun die Hölderstetigkeit von $W|_{V'}$ mit

$$\parallel W|_{V'} \parallel_{C^{0,\alpha}(V')} \ \leq \ \Big(c_6 + c_7\Big)\, \mathbf{C}_1 \parallel \varphi \parallel_{C(\partial D)}$$

und damit die Ungleichung (2.43) mit der Konstanten $\Lambda_2 = c_6 + c_7$. □

Der folgende Satz folgt Lemma 2.11 aus [CK1].

Satz 2.5 *Sei ∂D der C^1-glatte Rand eines beschränkten Gebietes D im $I\!R^3$ und sei $\alpha \in (0,1)$ eine reelle Zahl. Wir betrachten einen stetigen Kern*

$$K : \partial D \times \partial D \setminus \triangle_{\partial D} \to \mathbb{C},$$

der mit einer Konstanten $\mathbf{C}_2$ den Abschätzungen

$$|K(x,y)| \;\leq\; \mathbf{C}_2 \; |x-y|^{-2} \tag{2.46}$$

und

$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \;\leq\; \mathbf{C}_2 \sum_{j=1}^{M} |x_1 - y|^{-2-j} \, |x_1 - x_2|^j \tag{2.47}$$

für alle $x, y, x_1, x_2 \in \partial D$ mit $x \neq y$ und $2\,|x_1 - x_2| \;\leq\; |x_1 - y|$ genüge. Sei ferner

$$\left| \int_{\partial D \setminus \Omega_\epsilon(x)} K(x,y) \right| \;\leq\; \mathbf{C}_2 \tag{2.48}$$

für alle $\epsilon > 0$, und $x \in \partial D$. Dann ist für $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ die Funktion

$$W(x) := \int_{\partial D} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]ds(y), \quad x \in \partial D \tag{2.49}$$

$\alpha-$hölderstetig auf ∂D und es gilt

$$\| \, W \, \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \;\leq\; \Lambda_5 \, \mathbf{C}_2 \, \| \, \varphi \, \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \tag{2.50}$$

mit einer Konstanten Λ_5, welche nur vom Parameter α, von M und den Konstanten $\Gamma_0, ..., \Gamma_3$ eines isometrischen Atlanten von ∂D abhängt.

Beweis: I. Sei $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \Psi_i), i = 1, ..., N\}$ ein endlicher isometrischer Atlas von ∂D und V_i' die den Mengen V_i in Abschnitt 1.2 zugeordneten offenen Mengen mit $\overline{V_i'} \subset V_i$. Zum Beweis des Satzes reicht es aus, die jeweiligen Aussagen für $W|_{V_i'}$ für ein beliebiges $i \in \{1, ..., N\}$ zu zeigen. Zur Abkürzung setzen wir $\Psi = \Psi_i, U = U_i, V = V_i$ und $U' = U_i'$. Wir zerlegen $W(r,.)|_{V'} = W_1 + W_2$ mit

$$W_1(x) \;:=\; \int_{\partial D \setminus V} K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]ds(y), \quad x \in V'$$

und

$$W_2(x) \ := \ \int_V K(x,y)[\varphi(y) - \varphi(x)]ds(y), \qquad x \in V'.$$

II. Wir behandeln W_1. Aus den Bedingungen (2.46) und (2.47) folgen die Abschätzungen

$$|W_1(x)| \ \leq \ \Gamma_3^{\alpha-2}\, s(\partial D)\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

und

$$|W_1(x_1) - W_1(x_2)| \ \leq \ \left(\sum_{j=1}^{M} \Gamma_3^{\alpha-2-j} \Gamma_0^{j-\alpha} \right) \ s(\partial D)\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \ |x_1 - x_2|^{\alpha}$$

für $x_1, x_2, x \in V'$ mit $2\,|x_1 - x_2| \ \leq \ \Gamma_3$. Für $2\ |x_1 - x_2| \ > \ \Gamma_3$ erhalten wir

$$|W_1(x_1) - W_1(x_2)| \ \leq \ 2^{1+\alpha}\, \Gamma_3^{\alpha-2}\, \Gamma_2^{-\alpha}\, s(\partial D)\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \ |x_1 - x_2|^{\alpha}.$$

Es folgt die Hölderstetigkeit von W_1 auf V' und die Abschätzung

$$\parallel W_1 \parallel_{C^{0,\alpha}(V')} \ \leq \ c_8\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)}, \tag{2.51}$$

mit

$$c_8 = \left\{ \Gamma_3^{\alpha-2} + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_3^{\alpha-2-j} \Gamma_0^{j-\alpha} + 2^{1+\alpha}\, \Gamma_3^{\alpha-2}\, \Gamma_2^{-\alpha} \right\} \ s(\partial D).$$

III. Betrachten wir nun W_2. Wir gehen nun analog zum Beweis von Satz 2.2 vor. Ein direkter Zugriff auf diesen Satz mit Hilfe der lokalen Karte ist wegen der in Abschnitt 1.5 besprochenen Probleme mit den Cauchy-Hauptwerten nicht möglich. Wir führen im folgenden stets zuerst eine geeignete Zerlegung 'auf ∂D' durch und nutzen anschließend die lokale Karte und die Eigenschaften des isometrischen Atlas zur Abschätzung der Integrale. Es gilt

$$\begin{aligned} |W_2(x)| \ &\leq \ \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \int_V \frac{1}{|x-y|^{2-\alpha}} ds(y) \\ &\leq \ \Gamma_2^{\alpha-2}\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \int_U \frac{1}{|u-v|^{2-\alpha}} dv \\ &\leq \ \Gamma_2^{\alpha-2}\, c_1\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

wobei c_1 durch (2.6) mit $\gamma_0 := \Gamma_0/\Gamma_2$ gegeben wird. Wir wollen nun für $x_1, x_2 \in V'$ die Ungleichung

$$|W_2(x_1) - W_2(x_2)| \;\leq\; c' \,\mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} |x_1 - x_2|^\alpha \tag{2.53}$$

mit einer geeigneten Konstanten c' nachweisen. Betrachten wir $\epsilon := 2\,|x_1 - x_2|$ und $\eta := \epsilon/\Gamma_2$. Mit Hilfe von (2.46) und (2.8) und der Ungleichung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \;\;\leq\;\; \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} |x - y|^\alpha \tag{2.54}$$

für die hölderstetige Funktion φ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{V\cap\Omega_{2\epsilon}(x_1)} \Big[K(x_1,y)\,[\varphi(y)-\varphi(x_1)] - K(x_2,y)\,[\varphi(y)-\varphi(x_2)]\Big] ds(y)\right| \\
&\leq \int_{V\cap\Omega_{4\epsilon}(x_1)} |K(x_1,y)| \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} |x_1 - y|^\alpha \,ds(y) \\
&\qquad\qquad + \int_{V\cap\Omega_{4\epsilon}(x_2)} |K(x_2,y)| \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} |x_2 - y|^\alpha \,ds(y) \\
&\leq\; 2 \quad \Gamma_2^{\alpha-2} \quad \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} \int_{\Omega_{4\eta}(u)} \frac{1}{|u-v|^{2-\alpha}} dv \\
&\leq\; 2^{\alpha+1}\,\Gamma_2^{-2}\;\; c_2\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} |x_1 - x_2|^\alpha \,,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

wobei c_2 die in (2.9) definierte Konstante ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{V\setminus\Omega_{2\epsilon}(x_1)} \Big[K(x_1,y)\,[\varphi(y)-\varphi(x_1)] - K(x_2,y)\,[\varphi(y)-\varphi(x_2)]\Big] ds(y)\right| \\
&\qquad \leq \;\; \left|\int_{V\setminus\Omega_{2\epsilon}(x_1)} \Big[K(x_1,y) - K(x_2,y)\Big]\,[\varphi(y)-\varphi(x_2)]\,ds(y)\right| \\
&\qquad\qquad\qquad + \;\; \left|\int_{V\setminus\Omega_{2\epsilon}(x_1)} K(x_1,y)\,[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]\,ds(y)\right| .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Wir nutzen für den ersten Term der rechten Seite von (2.56) die Abschätzungen (2.54), (2.47) und Gleichung (2.10) für $\delta := |x_1 - x_2| / \Gamma_1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{V\setminus\Omega_{2\epsilon}(x_1)} |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\, |\varphi(y) - \varphi(x_2)|\, ds(y) \\
\leq\ & \int_{V\setminus\Omega_{\epsilon}(x_2)} |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\, |\varphi(y) - \varphi(x_2)|\, ds(y) \qquad (2.57)\\
\leq\ & \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} \left\{ \sum_{j=1}^{M} |x_1 - x_2|^j \int_{V\setminus\Omega_{\epsilon}(x_2)} |x_2 - y|^{\alpha-2-j}\, ds(y) \right\} \\
\leq\ & (\Gamma_1 + \Gamma_1^M)\, (\Gamma_2^{\alpha-2} + \Gamma_2^{\alpha-2-M})\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} \left\{ \sum_{j=1}^{M} \delta^j\, 2\pi \int_{2\delta}^{\gamma_0} r^{\alpha-1-j} dr \right\} \\
\leq\ & c_3\, (\Gamma_1 + \Gamma_1^M)\, (\Gamma_2^{\alpha-2} + \Gamma_2^{\alpha-2-M})\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(V)} \quad |x_1 - x_2|^\alpha
\end{aligned}$$

mit der durch (2.11) gegebenen Konstanten c_3. Der zweite Term wird mit Hilfe von (2.54) und (2.48) wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{U\setminus\Omega_{2\epsilon}(x_1)} K(x_1,y)\, [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\, ds(y) \right| \\
\leq\ & \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(U)} \quad |x_1 - x_2|^\alpha . \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen (2.55), (2.57) und (2.58) ergibt sich nun unmittelbar die Abschätzung (2.53) mit

$$c' = 2^{\alpha+1}\Gamma_2^{-2} c_2 \quad + \quad (\Gamma_1 + \Gamma_1^M)\, \Gamma_1^{-\alpha}\, (\Gamma_2^{\alpha-2} + \Gamma_2^{\alpha-2-M}) c_3 \quad + \quad 1$$

und daraus zusammen mit (2.52) die Hölderstetigkeit von W_2 und die Abschätzung

$$\parallel W_2 \parallel_{C^{0,\alpha}(V')} \quad \leq \quad c_9\, \mathbf{C}_2 \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(M)} \qquad (2.59)$$

mit

$$c_9 = \Gamma_2^{\alpha-2}\, c_1 \quad + \quad 2^{\alpha+1}\Gamma_2^{\alpha-2} c_2 \quad + \quad (\Gamma_1 + \Gamma_1^M)\, \Gamma_1^{-\alpha}\, (\Gamma_2^{\alpha-2} + \Gamma_2^{\alpha-2-M}) c_3 \quad + \quad 1.$$

IV. Aus (2.51) und (2.59) folgt nun die Hölderstetigkeit von $W|_{V'}$ mit

$$\| W|_{V'} \|_{C^{0,\alpha}(V')} \leq \Big(c_8 + c_9\Big) \, \mathbf{C}_2 \, \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

und damit die Ungleichung (2.50) mit der Konstanten

$$\Lambda_5 = c_8 + c_9.$$

$\square$

Im letzten Satz des Kapitels behandeln wir zwei spezielle singuläre Integraloperatoren, welche in Kapitel 3 bzw. 4 bei der Untersuchung der Operatoren T und N benötigt werden. Es handelt sich bei den untersuchten Kernen K um Terme, aus welchen sich die Fréchet Ableitung des Kernes der in Abschnitt 3.1 definierten Operatoren $\hat{T}_j$ zusammensetzt, vgl. auch Lemma 3.11. Für die Definition der Menge $\mathcal{C}^2_\rho$ verweisen wir auf Abschnitt 1.3.

Satz 2.6 *Sei ∂D der C^2−glatte Rand eines beschränkten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^3$ und α aus $(0,1)$ eine reelle Zahl. Gegeben seien ferner eine hinreichend kleine reelle Zahl $\rho > 0$, eine positive Zahl $R \in \mathbb{R}$, Zahlen $k_1, ..., k_3 \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 - 2k_2 - 2k_3 = 3$ und $j \in \{1,2,3\}$. Für Funktionen $r \in \mathcal{C}^2_\rho$ und $h \in \mathcal{C}^2_R$ betrachten wir die Kerne*

$$\begin{aligned} K(r,h,x,y) \;&:=\; \frac{h_j(x) - h_j(y)}{|x_r - y_r|^{k_1}} \Big\langle x_r - y_r, h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_2} \\ &\quad \cdot \Big\langle h(x) - h(y), h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_3}, \qquad x \neq y, x, y \in \partial D \end{aligned} \tag{2.60}$$

und

$$\begin{aligned} K(r,h,x,y) \;&:=\; \frac{(x_r - y_r)_j}{|x_r - y_r|^{k_1}} \Big\langle x_r - y_r, h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_2} \\ &\quad \cdot \Big\langle h(x) - h(y), h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_3}, \qquad x \neq y, x, y \in \partial D. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$. Dann streben für $\epsilon \to 0$ die Funktionen

$$W_\epsilon(r,h,x) \quad := \quad \int_{\partial D \setminus \Omega_\epsilon(x)} K(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in \partial D$$

gleichmäßig auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2 \times \partial D$ gegen einen Grenzwert $W(r,h,x)$. Die Funktionen $W(r,h,.)$ sind α-hölderstetig auf ∂D und es gilt

$$\| W(r,h,.) \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \quad \leq \quad \Lambda_6 \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \tag{2.62}$$

für alle $(r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2$ mit einer Konstanten Λ_6, welche von $(r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2$ unabhängig ist.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für den ersten Kern (2.60) durch. Der Kern (2.61) wird genauso behandelt.

I. Sei $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D und $\Psi : U \to V \subset \partial D$ eine lokale Karte aus $\mathcal{A}$, ferner V' eine offene Teilmenge von V mit $d(V', M \setminus V) \geq \Gamma_3$ – vgl. Abschnitt 1.2. Zum Beweis des Satzes reicht es aus, für eine beliebige lokale Karte die Konvergenz $W_\epsilon(r,h,x) \to W(r,h,x), \epsilon \to 0$ gleichmäßig auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2 \times V'$ sowie die Abschätzung

$$\| W(r,h,\cdot)|_{V'} \|_{C^{0,\alpha}(V')} \quad \leq \quad \Lambda_6 \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}, \qquad (r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2$$

mit einer nicht von r, h, (U, V, Ψ) und V' abhängigen Konstanten Λ_6 nachzuweisen. Wir zerlegen dazu $W_\epsilon|_{V'} = W_{1,\epsilon} + W_{2,\epsilon}$ mit

$$W_{1,\epsilon}(r,h,x) \quad := \quad \int_{\partial D \setminus (V \cup \Omega_\epsilon(x))} K(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in V'$$

und

$$W_{2,\epsilon}(r,h,x) \quad := \quad \int_{V \setminus \Omega_\epsilon(x)} K(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in V'$$

für $(r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2$. Teil II. bis IV. dienen zum Nachweis der Aussagen für die Funktionen $W_{1,\epsilon}$ und $W_{2,\epsilon}$.

II. Wir betrachten $W_{1,\epsilon}(r,h,\cdot)$. Der Kern $K(r,h,x,y)$ ist für $y \in \partial D \setminus V$ in V' stetig nach x differenzierbar. Wir überzeugen uns auf elementare Weise von der Gültigkeit der Abschätzungen

$$|K(r,h,x,y)| \;\leq\; c_{10} \tag{2.63}$$

für $(r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2,\ x \in V',\ y \in \partial D \setminus V$ und

$$|(\mathrm{Grad}_x K)(r,h,x,y)| \;\leq\; c_{11} \tag{2.64}$$

für $(r,h) \in \mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2,\ x \in V',\ y \in \partial D \setminus V$ mit den von $r,\ h,\ (U,V,\Psi)$ und V' unabhängigen Konstanten c_{10} und c_{11}. Für $\epsilon < \Gamma_3$ und $x \in V'$ gilt die Gleichheit $W_{1,\epsilon}(r,h,x) = W_{1,0}(r,h,x)$ unabhängig von ϵ. Somit konvergiert $W_{1,\epsilon}$ gleichmäßig auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_R^2 \times V'$ gegen $W_{1,0}(r,h,x)$. Es gilt

$$|W_{1,0}(r,h,x)| \;\leq\; c_{10}\, s(\partial D) \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \tag{2.65}$$

und

$$\begin{aligned} |W_{1,0}(r,h,x_1) - W_{1,0}(r,h,x_2)| &= \left| \int_\gamma \Big\langle \mathrm{Grad}_x W_1(r,h,\xi), t_\gamma(\xi) \Big\rangle d\gamma(\xi) \right| \\ &\leq c_{11} \int_\gamma d\gamma(\xi)\ s(\partial D) \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \\ &\leq c_{11} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\, \Gamma_0^{1-\alpha}\ \ s(\partial D) \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)}\ |x_1 - x_2|^\alpha , \end{aligned} \tag{2.66}$$

wobei $\gamma \subset \partial D$ der durch $\Psi(\Psi^{-1}(x_2) + t[\Psi^{-1}(x_1) - \Psi^{-1}(x_2)]),\ t \in [0,1]$ gegebene Weg von x_2 nach x_1 ist und t_γ den normierten Tangentialvektor an diesen Weg bezeichnet. Es ist also $W_{1,0}(r,h,.)$ α-hölderstetig mit

$$\parallel W_{1,0}(r,h,\cdot) \parallel_{C^{0,\alpha}(V')} \;\leq\; \left\{ c_{10} + c_{11} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\, \Gamma_0^{1-\alpha} \right\}\ s(\partial D) \parallel \varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(\partial D)}. \tag{2.67}$$

III. Betrachten wir den Kern $k(r,h,u,v) := K(r,h,\Psi(u),\Psi(v))J(v)$ auf $U' \times U$ mit $U' := \Psi^{-1}(V')$. Wir setzen zunächst $\mathcal{H}(v) := (h \circ \Psi)(v)$ und $\mathcal{R}(v) := (r \circ \Psi)(v)$. Diese Funktionen sind zweimal stetig differenzierbar auf U mit durch $R/C_{\mathcal{A}_1}$ bzw. $\rho/C_{\mathcal{A}_1}$ beschränkten zweiten Ableitungen, vgl. (1.13). Wir zerlegen die durch

$$w_\epsilon(r,h,u) \;:=\; \int_{U \backslash \Omega_\epsilon(u)} k(r,h,u,v)\,(\varphi \circ \Psi)(v)\,dv, \qquad (r,h,u) \in \mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_\rho \times U$$

gegebene Funktion bei Gebrauch von $\rho := |v-u|$ und $\theta(u,v) := (v-u)/\,|v-u|$ in die Summe der Terme

$$w_{0,\epsilon}(r,h,u) \;:=\; \int_{U \backslash \Omega_\epsilon(u)} \frac{1}{\varrho^2} f(r,h,u,\theta(u,v))\,(\varphi \circ \Psi)(v)\,dv, \qquad (r,h,u) \in \mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_\rho \times U$$

und

$$w_{1,\epsilon}(r,h,u) \;:=\; \int_{U \backslash \Omega_\epsilon(u)} k_1(r,h,u,v)\,(\varphi \circ \Psi)(v)\,dv, \qquad (r,h,u) \in \mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_\rho \times U$$

mit

$$\begin{aligned} f(r,h,u,\theta) \;:=\; & \frac{-\Big((\mathbf{grad}\mathcal{H})(u) \circ \theta\Big)_j}{|(\mathbf{grad}\Psi + \mathbf{grad}\mathcal{R})(u) \circ \theta|^{k_1}} \langle (\mathbf{grad}\Psi + \mathbf{grad}\mathcal{R})(u) \circ \theta, \\ & (\mathbf{grad}\mathcal{H})(u) \circ \theta \rangle^{k_2} \cdot \langle (\mathbf{grad}\mathcal{H})(u) \circ \theta, (\mathbf{grad}\mathcal{H})(u) \circ \theta \rangle^{k_3} J(u), \end{aligned}$$

und

$$k_1(r,h,u,v) \;:=\; k(r,h,u,v) - \frac{1}{\varrho^2} f(r,h,u,\theta(u,v)),$$

jeweils für $(r,h,u,v) \in \mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_\rho \times U' \times U$. Wir nutzen Satz 2.3, um die Konvergenz von $w_{0,\epsilon}(r,h,u)$ gegen einen Grenzwert $w_0(r,h,u)$ gleichmäßig auf $\mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_\rho \times U'$ zu zeigen. Wegen der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{R}$ ist $f(r,h,u,\theta)$ stetig auf $U \times S$ nach u und θ differenzierbar. Man erhält eine von r, h, (U,V,Ψ) und V' unabhängige Schranke c_{12} für die Ableitungen. Die Beziehung (2.28) folgt aus der Antisymmetrie von f in θ. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 2.3 erfüllt. Wir folgern die Hölderstetigkeit der Funktion $w_{0,0}(r,h,\cdot) := \lim_{\epsilon \to 0} w_{0,\epsilon}(r,h,\cdot)$ und die Abschätzung

$$\| \, w_{0,0}(r,h,\cdot) \, \|_{C^{0,\alpha}(U)} \;\leq\; c_{12}\Lambda_3 \, \| \, \varphi \circ \Psi \, \|_{C^{0,\alpha}(U)}. \tag{2.68}$$

Wir wollen Satz 2.1 auf $w_{1,\epsilon}(r,h,\cdot)$ anwenden. Mit Hilfe einer längeren, aber elementaren Rechnung unter Ausnutzung des Mittelwertsatzes lassen sich die Abschätzungen

$$|k_1(r,h,u,v)| \;\leq\; c_{13}\; |u-v|^{-1}\,, \tag{2.69}$$

und

$$|k_1(r,h,u_1,v) - k_1(r,h,u_2,v)| \;\leq\; c_{14}\; |u_1-v|^{-2}\; |u_1-u_2|\,, \tag{2.70}$$

je für $u \neq v, u \in U', v \in U, r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in \mathcal{C}^2_\rho$ mit von $r,h,\ (U,V,\Psi)$ und V' unabhängigen Konstanten c_{13} und c_{14} nachweisen. Mit Hilfe von

$$|u-v|^{-1} \leq \gamma_0^{1-\alpha}\,|u-v|^{\alpha-2}\,,\;\; u\neq v, u,v \in U$$

– es gilt $|u-v| \leq \gamma_0$ mit $\gamma_0 := \Gamma_0/\Gamma_2$ für alle $u,v \in U$ – erhält man daraus die Voraussetzungen des Satzes 2.1. Wir erhalten die Konvergenz von $w_{1,\epsilon}(r,h,\Psi^{-1}(x))$ gegen $w_{1,0}(r,h,\Psi^{-1}(x))$ gleichmäßig auf $\mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_R \times V'$ und unabhängig von der Karte $\Psi : U \to V$ und eine zu (2.68) analoge Abschätzung der Höldernorm von $w_1(r,h,\cdot)$. Es folgt für $w(r,h,\cdot) := w_{0,0}(r,h,\cdot) + w_{1,0}(r,h,\cdot)$ die Abschätzung

$$\|\; w(r,h,.)\;\|_{C^{0,\alpha}(U)} \;\leq\; c_{15}\;\|\;\varphi\circ\Psi\;\|_{C^{0,\alpha}(U)} \tag{2.71}$$

mit

$$c_{15} \;=\; c_{12}\Lambda_3 \;+\; \gamma_o^{1-\alpha}(c_{13}+c_{14})\;\Lambda_1,$$

also insbesondere

$$|w(r,h,u)| \;\leq\; c_{15}\;\|\;\varphi\circ\Psi\;\|_{C^{0,\alpha}(U)} \tag{2.72}$$

und

$$|w(r,h,u_1) - w(r,h,u_2)| \;\leq\; c_{15}\;\|\;\varphi\circ\Psi\;\|_{C^{0,\alpha}(U)}\,|u_1-u_2|^{\alpha} \tag{2.73}$$

für $r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in \mathcal{C}^2_\rho$.

IV. Mit Hilfe von Lemma 1.5 folgt die Identität

$$\lim_{\epsilon \to 0} W_{2,\epsilon}(r, h, \Psi(u)) = w(r, h, u).$$

Aus Beweisteil III., der Abschätzung

$$|u_1 - u_2| \;\; \leq \;\; \frac{1}{\Gamma_2} \, |x_1 - x_2|$$

für einen isometrischen Atlas und

$$\| \varphi \circ \Psi \|_{C^{0,\alpha}(U)} \;\; \leq \;\; \frac{1}{C_{\mathcal{A},1}} \, \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

erhalten wir nun die Hölderstetigkeit von

$$W_{2,0}(r, h, \cdot) := \lim_{\epsilon \to 0} W_{2,\epsilon}(r, h, \cdot)$$

aus (2.72) und (2.73). Es gilt die Abschätzung

$$\| W_{2,0}(r, h, \cdot) \|_{C^{0,\alpha}(V')} \;\; \leq \;\; c_{16} \, \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} \tag{2.74}$$

mit

$$c_{16} \;\; := c_{15} \frac{1}{C_{\mathcal{A},1}(1 + \Gamma_2^{\alpha})}. \tag{2.75}$$

Man erhält aus (2.68) und (2.74) die Aussage des Satzes mit

$$\Lambda_6 := s(\partial D) \left\{ c_{10} + c_{11} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Gamma_0^{1-\alpha} \right\} + c_{15} \frac{1}{C_{\mathcal{A},1}(1 + \Gamma_2^{\alpha})}.$$

Die Gleichmäßigkeit der Grenzwerte für $\epsilon \to 0$ erhält man wie folgt: In Lemma 1.5 zerlegen wir die Integrale in schwach singuläre Anteile und ein stark singuläres Integral, dessen Wert allerdings für $\epsilon < \Gamma_3$ (Γ_3 ist unabhängig von r und h) konstant ist. Die stark singulären Integralanteile konvergieren also gleichmäßig. Für die schwach singulären Integrale folgt die gleichmäßige Konvergenz aus den gleichmäßigen Schranken für die schwach singulären Kerne. $\square$

Kapitel 3

Fréchet Differenzierbarkeit von Integral- und Randintegraloperatoren

Das dritte Kapitel dient zum Nachweis der Fréchet Differenzierbarkeit von verschiedenen Potentialen, Randintegraloperatoren sowie einigen weiteren Operatoren in Abhängigkeit vom Rand eines Gebietes. Wir betrachten alle Operatoren in der auf einen festen Referenzrand $\partial D = \partial D_0$ transformierten Form. Eigenschaften der durch

$$x \mapsto x + r(x)$$

(mit einer geeignet glatten Funktion $r \in C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)$) gegebenen Transformation findet man in Abschnitt 1.3.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses dritten Kapitels beruhen auf einer Anwendung des in Abschnitt 3.3 festgehaltenen und bewiesenen Satzes 3.5. Es geht darin um die Fréchet Differenzierbarkeit eines singulären Integraloperators

$$(A(r)\varphi)(x) := \int_{G_2} f(r, x, y)\varphi(y)d\mu(y), \quad x \in G_1$$

nach einer Funktion r, von welcher der in $|x - y|$ singuläre Kern $f(r, \cdot, \cdot)$ des Operators A abhängt. Es wird gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen Integration und Differentiation vertauscht werden dürfen. Zu diesen Voraussetzungen gehört zunächst die zweimalige Fréchet Differenzierbarkeit des Kernes.

Darüberhinaus wird vorausgesetzt, daß die aus A entstehenden Integraloperatoren, bei denen der Kern f durch seine erste und zweite Fréchet Ableitung $\frac{\partial f}{\partial r}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ ersetzt wird, dieselben Abbildungseigenschaften wie der Operator A haben, also etwa beschränkte lineare Operatoren von der Menge der stetigen Funktionen auf G_2 in die Menge der stetigen Funktionen auf G_1 sind. Dabei werden gleichmäßig für alle Funktionen r einer Nullumgebung die Existenz des Integrals über die zweiten Fréchet Ableitungen im Sinne eines Cauchy Hauptwertes und gleichmäßige Schranken für die Integraloperatoren über die zweimal differenzierten Kerne verlangt. Die Struktur der Voraussetzungen dieses Satzes spiegelt sich in der Gliederung des dritten Kapitels wieder .

Im Abschnitt 3.1 sammeln wir Potentiale, Potential-, Projektions- und Spuroperatoren, welche im vierten Kapitel zur Lösung von Randwertproblemen aus dem akustischen und elektromagnetischen Aufgabengebiet benutzt werden.

Grundlegende Definitionen und Eigenschaften der Fréchet Ableitung von Funktionen zwischen normierten Räumen werden in Abschnitt 3.2 zusammengefaßt. Abschnitt 3.3 enthält den schon angesprochenen grundlegenden Differentiationssatz.

In den Abschnitten 3.4 bis 3.6 beschäftigen wir uns mit den in Abschnitt 3.1 zusammengestellten Operatoren. Die Fréchet Differenzierbarkeit ihrer Kerne ist Gegenstand von Abschnitt 3.4. Wir überzeugen uns dort auf elementare Weise von der beliebig häufigen Fréchet Differenzierbarkeit dieser Funktionen und geben eine Reihe von Abschätzungen für die Singularität der $\mu-$mal differenzierten Kerne in $|x-y|$ an. In den Abschnitten 3.5 und 3.6 studieren wir die Abbildungseigenschaften der Integrale über die differenzierten Kerne und nutzen den angesprochenen Satz 3.5, um Aussagen über die Fréchet Differenzierbarkeit des jeweiligen Integraloperators zu machen. Dabei arbeiten wir in Abschnitt 3.5 in den Räumen der stetigen und hölderstetigen Funktionen, in Abschnitt 3.6 in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen.

3.1 Potentiale und Potentialoperatoren

Im vierten Kapitel werden zwei Randwertprobleme zur akustischen Wellengleichung und ein Randwertproblem zu den zeitharmonischen Maxwellgleichungen mit Hilfe von Flächenpotentialen gelöst. Dabei reduziert man die Lösung des Randwertproblems auf die Lösung einer Randintegralgleichung, in der verschiedene Randintegraloperatoren auftreten. Aufgabe des gegenwärtigen Abschnitts ist es, die benötigten Potentiale und Operatoren zusammenzustellen.

Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand. Die uns interessierenden Potentiale und Potentialoperatoren leben auf

$$\partial D_r = \{x + r(x), x \in \partial D\},$$

werden allerdings in den Abschnitten 3.4 bis 3.6 und Kapitel 4 in einer auf $\partial D = \partial D_0$ transformierten Form benötigt und hier gleich so notiert. Eigenschaften der durch

$$x \mapsto x + r(x)$$

gegebenen Transformation findet man in Abschnitt 1.3.

Wir betrachten im folgenden stets Funktionen $r \in C^2(\partial D, I\!R^3)$, $\varphi, \psi \in C(\partial D)$, $a \in C(\partial D, \mathbb{C}^3)$ und $b \in CT(\partial D_r)$. $\nu(r,x)$ bezeichne die nach außen weisende Normale an das Gebiet D_r im Punkt $x+r(x)$ und η sei ein reeller Parameter. Wir betrachten später die Helmholtzgleichung mit der komplexen *Wellenzahl* κ. Für die Grundlösung zur Helmholtzgleichung in ihrer ursprünglichen und der auf das Referenzgebiet transformierten Form und erhalten wir mit Hilfe von $x_r := x+r(x)$ die Ausdrücke

$$\Phi(x,y) := \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, x \neq y, \quad x, y \in I\!R^3, \qquad \Phi(r,x,y) := \frac{e^{i\kappa|x_r-y_r|}}{|x_r-y_r|}$$

und

$$(\mathrm{grad}_x\Phi)(r,x,y) := i\kappa\, \frac{x_r-y_r}{|x_r-y_r|^2} e^{i\kappa|x_r-y_r|} - \frac{x_r-y_r}{|x_r-y_r|^3} e^{i\kappa|x_r-y_r|},$$

jeweils für $x \neq y, x, y \in \partial D$.

Akustische Potentiale

Zur Lösung der Randwertprobleme zur akustischen Wellengleichung grundlegend sind das *akustische Einfachschichtpotential*

$$(S_1(r)\varphi)(x) \quad := \quad \int_{\partial D} \Phi(x, y_r)\varphi(y)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r,$$

und das *akustische Doppelschichtpotential*

$$(S_2(r)\varphi)(x) := \int_{\partial D} \left\langle \nu(r,y), (\mathrm{grad}_y \Phi)(x, y_r) \right\rangle \varphi(y) J_T(r,y) ds(y), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r.$$

Wir werden in Abschnitt 4.2 das dort definierte *akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis* mit Hilfe eines *kombinierten Potentialansatzes*

$$(S_3(r)\varphi)(x) := (S_2(r)\varphi)(x) - i\eta(S_1(r)\varphi)(x), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r$$

und in Abschnitt 4.3 das *akustische Streuproblem am schallharten Hindernis* mit Hilfe eines *kombinierten regularisierten Potentialansatzes*

$$(S_4(r)\varphi)(x) := (S_1(r)\varphi)(x) + i\eta(S_2(r)S_0^2\varphi)(x), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r$$

lösen. Mit S_0 bezeichnen wir dabei den unten definierten Operator S im potentialtheoretischen Fall $\kappa = 0$.

Elektromagnetische Potentiale

Analog zu den akustischen Potentialen nutzen wir bei der Behandlung des in Abschnitt 4.4 beschriebenen *elektromagnetischen Streuproblems* die folgenden Potentiale einer *magnetischen Dipolverteilung*

$$(E_1(r)a)(x) := \mathrm{curl} \int_{\partial D} \Phi(x, y_r) a(y) J_T(r,y) ds(y), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r,$$

$$(H_1(r)a)(x) := \frac{1}{i\kappa} \mathrm{curl} E_1(r,x)a \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r$$

und einer *elektrischen Dipolverteilung*

$$(E_2(r)a)(x) := \mathrm{curl}\,\mathrm{curl} \int_{\partial D} \nu(r,y) \times a(y) \Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y), \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r,$$

$$(H_2(r)a)(x) := \frac{1}{i\kappa} \mathrm{curl} E_2(r,x)a, \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_r.$$

Eine Lösung des elektromagnetischen Streuproblems suchen wir in Abschnitt 4.4 in Form eines *kombinierten regularisierter Potentialansatzes*

$$\begin{aligned}(E_3(r)a)(x) &:= \Big(E_1(r)a\Big)(x) + i\eta\Big(E_2(r)(S_0^2 a)\Big)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D_r,\\ (H_3(r)a)(x) &:= \tfrac{1}{i\kappa}\mathrm{curl}\,(E_3(r)a)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D_r.\end{aligned}$$

Potentialoperatoren

Bei der Berechnung der Randwerte und der Normalenableitung der oben angegebenen akustischen Potentiale bzw. der Werte $\nu \times E_i, i = 1,2$ der elektromagnetischen Potentiale treten *Potentialoperatoren* über den Rand der gegebenen Gebiete auf – vgl. etwa [CK1] und [CK2]. Diese Operatoren sind Bestandteile von Integralgleichungen, auf welche die Lösung der Randwertprobleme durch den Potentialansatz reduziert werden kann und welche in Kapitel 4 eine wesentliche Rolle spielen. Wir stellen im folgenden die benötigten Opertoren vor. Es sei

$$\begin{aligned}(S(r)\varphi)(x) &:= 2\int_{\partial D}\Phi(r,x,y)\varphi(y)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D,\\ (K(r)\varphi)(x) &:= 2\int_{\partial D}\Big\langle \nu(r,y), (\mathrm{grad}_y\Phi)(r,x,y)\Big\rangle\varphi(y)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D.\end{aligned}$$

Der Operator S beschreibt die Randwerte des akustischen Einfachschichtpotentials, der Operator K tritt bei der Berechnung der Randwerte des akustischen Doppelschichtpotentials auf. Weiter setzen wir

$$\begin{aligned}(K^*(r)\psi)(x) &:= 2\int_{\partial D}\Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x\Phi)(r,x,y)\Big\rangle\psi(y)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D,\\ (M(r)b)(x) &:= 2\int_{\partial D}\nu(r,x)\times\Big(\mathrm{curl}_x(b(y)\Phi(r,x,y))\Big)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D.\end{aligned}$$

Der Operator K^* spielt eine zu K analoge Rolle bei der Berechnung der Normalenableitung des akustischen Einfachschichtpotentials. M beschreibt die Werte $\nu \times E_1$ des Potentials E_1 einer magnetischen Dipolverteilung.

Die Normalenableitung des akustischen Doppelschichtpotentials und die Randwerte $\nu \times E_2$ des Potentials einer elektrischen Dipolverteilung existieren im allgemeinen nicht für jede stetige Dichte, so daß wir an die Dichten höhere Regularitätsanforderungen stellen müssen. Sei also φ aus $C^{1,\alpha}(\partial D)$ und b ein Element von $C^{1,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3)$. Wir setzen

$$\begin{aligned}(T(r)\varphi)(x) \quad &:= \quad 2\,\kappa^2 \textstyle\int_{\partial D} \Phi(r,x,y)\Big\langle \nu(r,x), \nu(r,y)\Big\rangle \varphi(y) J_T(r,y) ds(y)\\ &-2\,\Big\langle \nu(r,x), \int_{\partial D} (\operatorname{grad}_x \Phi)(r,x,y) \times \Big((\operatorname{Grad}_T \varphi)(y) \times \nu(r,y)\Big) J_T(r,y) ds(y)\Big\rangle,\\ &\qquad x \in \partial D\end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned}(N(r)b)(x) \quad &:= \quad 2\nu(r,x) \times \kappa^2 \textstyle\int_{\partial D} \nu(r,y) \times b(y)\Phi(r,x,y) J(r,y) ds(y)\\ &+2\nu(r,x) \times \int_{\partial D} \operatorname{Div}_T\Big(\nu(r,y) \times b(y)\Big)(\operatorname{grad}_x \Phi)(r,x,y) J(r,y) ds(y),\\ &\qquad x \in \partial D.\end{aligned}$$

Der Operator T liefert die Normalenableitung des akustischen Doppelschichtpotentials auf dem Rand des Gebietes D_r, mit Hilfe des Operators N berechnet man die Werte $\nu \times E_2$ des Potentials E_2 der elektrischen Dipolverteilung.

Projektionsoperatoren

Die Tangentialebenen an ∂D und ∂D_r im Punkt x und $x + r(x)$ sind im allgemeinen voneinander verschieden. Bei der im vierten Kapitel durchgeführten Fréchet Differentiation von Vektorfeldern $a(r)$, welche Elemente der Tangentialebenen von ∂D_r sind, gerät man im allgemeinen aus der jeweiligen Tangentialebene heraus. Das ist problematisch, weil die Regularitätseigenschaften etwa der Funktion $M(r)a(r)$ wesentlich davon abhängen, daß $a(r)$ im Tangentialraum an ∂D_r liegt. Wir umgehen das Problem, indem wir geeignete Projektionsoperatoren einschieben. Zunächst betrachten wir dazu die Projektion P_0 eines Vektorfeldes in die Tangentialebene von ∂D

$$\begin{aligned}(P_0(r)a)(x) \quad &:= \quad \Big(\nu(x) \times a(x)\Big) \times \nu(x)\\ &= \quad a(x) - \Big\langle \nu(x), a(x)\Big\rangle \nu(x).\end{aligned}$$

Der Operator P_0 hängt nicht von r ab.

Die Projektion P_1 eines Vektorfeldes in die Tangentialebene von ∂D_r taucht bei der Lösung des elektromagnetischen Streuproblems auf. Es gilt

$$\begin{aligned}(P_1(r)a) &= (\nu(r,x) \times a(x)) \times \nu(r,x) \\ &= a(x) - \Big\langle \nu(r,x), a(x) \Big\rangle \nu(r,x).\end{aligned}$$

Die Inverse P_2 der Einschränkung von P_0 auf $T(\partial D_r)$ wird bei der Behandlung des Operators M von wesentlicher Bedeutung sein. Wir schieben später die Identität $P_2 P_0$ ein. Man berechnet P_2 zu

$$(P_2(r)a)(x) = a(x) - \nu(x) \frac{1}{\big\langle \nu(x), \nu(r,x) \big\rangle} \Big\langle \nu(r,x), a(x) \Big\rangle.$$

Wir setzen P_2 in offensichtlicher Weise auf die Menge aller Vektorfelder auf dem Rand von ∂D fort.

Spuroperatoren

Bei der Behandlung der akustischen Streuprobleme treten die Randwerte eines einfallenden Feldes bzw. ihre Normalenableitungen auf dem Rand des Gebietes D_r auf. Im Falle des elektromagnetischen Streuproblems benötigen wir die Werte $\nu \times E^i$ auf ∂D_r. Zur Berechnung dieser Werte führen wir die folgenden Operatoren ein.

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte offene Menge mit $D_r \subset B$ für alle $r \in \mathcal{C}^2_\rho$. Wir betrachten Funktionen $u^i \in C^\infty(B)$ und $E^i \in C^\infty(B, \mathbb{C}^3)$.

Die Randwerte für das Streuproblem am schallweichen Hindernis erhält man durch

$$(R_1(r)u^i)(x) := u^i(x + r(x)), \quad x \in \partial D.$$

Entsprechend nutzen wir zur Berechnung der Randwerte für das Streuproblem am schallharten Hindernis den Operator

$$(R_2(r)u^i)(x) := \Big\langle \nu(r,x), \operatorname{grad} u^i(x + r(x)) \Big\rangle, \quad x \in \partial D\ .$$

Die angegebenen Werte für das elektromagnetische Streuproblem liefert

$$(R_3(r)E^i)(x) := \nu(r,x) \times E^i(x + r(x)), \quad x \in \partial D.$$

Weitere Hilfsoperatoren

Zum Nachweis der Abbildungseigenschaften eines der angesprochenen Potentialoperatoren ist in der Regel eine geeignete Zerlegung des Operators hilfreich. Hier soll dies für die Operatoren $\hat{M}$ und T vorweggenommen werden. Dabei entsteht $\hat{M}$ durch Komposition von M mit dem Projektionsoperator P_2, deren Hintergrund bei Einführung von P_2 erläutert wurde.

Wir setzen $\hat{M}(r) := M(r)P_2(r)$. Für den Operator $\hat{M}$ erhalten wir

$$\hat{M}(r)a = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\hat{M}_{ij}(r)a_j \tag{3.1}$$

mit $a = (a_1, ..., a_3)$ und den Operatoren

$$\begin{aligned}
(\hat{M}_{1j}(r)\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x\Phi\Big)(r,x,y)\Big(\nu_j(r,x) - \nu_j(r,y)\Big) J_T(r,y)\varphi(y)ds(y),\\
(\hat{M}_{2j}(r)\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x\Phi)(r,x,y)\Big\langle \nu(r,x) - \nu(r,y), \nu(y)\Big\rangle\\
&\qquad\qquad \tfrac{\nu_j(r,y)}{\langle \nu(y),\nu(r,y)\rangle} J_T(r,y)\varphi(y)ds(y),\\
(\hat{M}_{3j}(r)\varphi)(x) &:= 2\, e_j \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), \Big(\mathrm{grad}_x\Phi\Big)(r,x,y)\Big\rangle J_T(r,y)\varphi(y)ds(y),\\
(\hat{M}_{4j}(r)\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial D} \nu(y)\tfrac{\nu_j(r,y)}{\langle \nu(y),\nu(r,y)\rangle}\Big\langle \nu(r,y), \Big(\mathrm{grad}_x\Phi\Big)(r,x,y)\Big\rangle J_T(r,y)\varphi(y)ds(y).
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun eine geeignete Zerlegung des Operators T. Mit

$$(S_\nu(r)\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(r,x,y)\Big\langle \nu(r,x), \nu(r,y)\Big\rangle \varphi(y)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

und

$$(T_i(r)\psi)(x) := \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), \Big(\mathrm{grad}_x\Phi\Big)(r,x,y) \times (e_i \times \nu(r,y))\Big\rangle J_T(r,y)\psi(y)ds(y), \tag{3.2}$$

für x aus ∂D und $i = 1, ..., 3$ gilt

$$\Big(T(r)\varphi\Big)(x) = 2\kappa^2\Big(S_\nu(r)\varphi\Big)(x) - 2\sum_{i=1}^{3}\Big(T_i(r)(\mathrm{Grad}_T\varphi)_i\Big)(x), \quad x \in \partial D. \qquad (3.3)$$

Die Operatoren T_i sollen noch weiter zerlegt werden. Wir setzen für eine hölderstetige Funktion χ

$$(\hat{T}_j(r)\chi)(x) := \int_{\partial D}\Big(\mathrm{grad}_x\Phi\Big)_j(r,x,y)\chi(y)ds(y), \qquad x \in \partial D, j = 1, ..., 3. \quad (3.4)$$

Es gilt damit

$$(T_i(r)\psi)(x) = \sum_{j,k,l=1}^{3}\nu_j(r,x)\epsilon_{j,k,l}\hat{T}_k(r)\Big[\Big(e_i \times \nu(r,\cdot)\Big)_l \psi\ J_T\Big](x), \qquad (3.5)$$

wobei e_i den $i-$ten Einheitsvektor in $I\!R^3$ bezeichnet und $\epsilon_{j,k,l}$ den total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe.

Die Kerne der Operatoren S_i für $i = 1, 2$, S, S_ν, K, K^*, E_i für $i = 1, 2$, $\hat{M}_{ij}$ für $i = 1, ..., 4$, $j = 1, ..., 3$ sind stetig bzw. schwach singulär. Dies ergibt sich aus den Abschätzungen des nächsten Abschnitts. Die Integrale sind somit für stetige Dichten definiert. Die Integrale der Operatoren $\hat{T}_j, T_i, j, i = 1, ..., 3$, T und N existieren für hölderstetig differenzierbare Dichten als Integrale im Sinne eines Cauchy-Hauptwertes.

Bezeichnungen für die Kerne

In Abschnitt 3.4 werden die Kerne der definierten Integraloperatoren auf ihre Fréchet Differenzierbarkeit untersucht. Wir bezeichnen dazu für den Rest der Arbeit mit $\mathcal{K}_L$ den Kern des Operators L für

$$L \in \Big\{S_1, S_2, E_1, E_2, S, S_\nu, K, K^*, \hat{M}_{ij}, \hat{T}_j\Big\}.$$

3.2 Fréchet Differenzierbarkeit

Wir stellen im folgenden grundlegende Definitionen zur Fréchet Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen normierten Räumen zusammen. Satz 3.2 wird im vierten Kapitel benutzt, um von der Differenzierbarkeit eines Operators A auf die Differenzierbarkeit von $(I-A)^{-1}$ zu schließen. Ausdrücke dieser Form mit einer Summe A von Potentialoperatoren treten bei der Lösung der Randwertprobleme auf. Lemma 3.3 bereitet den Differentiationssatz von Abschnitt 3.3 durch Taylorentwicklung einer zweimal Fréchet differenzierbaren Funktion vor. Im Anschluß an Lemma 3.3 wird die Fréchet Differenzierbarkeit verschiedener spezieller Funktionen nachgerechnet. Diese Rechnungen sind Grundlage der Aussagen von Abschnitt 3.4, in dem es um die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne der Potentialoperatoren geht. Schließlich beschäftigen wir uns in Lemma 3.4 mit der Frage, wie die Fréchet Differenzierbarkeit von Funktionen, welche auf dem Rand des Gebietes D definiert sind, mit Hilfe lokaler Karten nachgewiesen werden kann. Es stellt sich als ausreichend heraus, sich von der Fréchet Differenzierbarkeit in lokalen Karten zu überzeugen.

Seien X und Y normierte Räume. Mit $B(Y,X)$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von Y nach X und definieren $B^{(n)}(Y,X)$ rekursiv durch $B^{(n)}(Y,X) := B(Y, B^{(n-1)}(Y,X))$, $B^{(1)}(Y,X) := B(Y,X)$. Bezeichne $\Omega_1 \subset Y$ die Einheitskugel. Es gilt für eine Bilinearform s:

$$\sup_{b\in\Omega_1}\left\{\sup_{h\in\Omega_1} s(b,h)\right\} = \sup_{b\in\Omega_1, h\in\Omega_1}\{s(b,h)\}\,.$$

Daher ist $B^n(Y,X)$ genau die Menge aller beschränkten $n-$fach linearen Abbildungen $\underbrace{Y\times ...\times Y}_{n-\mathrm{mal}} \to X$.

Definition 3.1 *Sei $U\subset Y$ eine offene Teilmenge und $r_0\in U$. Eine Abbildung $A: U\to X, r\mapsto A(r)$ heißt* **Fréchet differenzierbar** *im Punkt r_0, wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $\frac{\partial A}{\partial r}: Y\to X$ und eine Nullumgebung V gibt, so daß für die Abbildung $A_1: V\to X$,*

$$A_1(h) \;:=\; A(r_0+h) - A(r_0) - \frac{\partial A}{\partial r}(r_0,h), \qquad h\in V \tag{3.6}$$

gilt

$$A_1(h) = o(\| h \|).$$

Die Abbildung $\frac{\partial A}{\partial r}$ *heißt* **Fréchet Ableitung** *von* A *im Punkt* r_0.

Eine Funktion $A : U \to X$ *heißt* n **mal Fréchet differenzierbar** *im Punkt* r, *wenn die Funktion* $n-1$ *mal Fréchet differenzierbar ist in* r *und wenn* $\frac{\partial^{n-1} A}{\partial r^{n-1}}(r,.)$ *als Abbildung* $U \to B^{(n-1)}(Y,X), r \mapsto \frac{\partial^{n-1} A}{\partial r^{n-1}}(r,.)$ *Fréchet differenzierbar ist.*

Wesentliche Eigenschaften der Differentiation von Funktionen $I\!R \to I\!R$ gelten auch für die Fréchet Ableitung. Es gilt unter geeigneten Voraussetzungen die *Symmetrie* höherer Ableitungen, der *Taylor'sche Satz* in schwacher und starker Form sowie *Produkt-* und *Kettenregel.* Man findet die entsprechenden Sätze mit Beweisen etwa in [Be], Kapitel 2. Die $n-$te Fréchet-Ableitung ist eine $n-$fach lineare Abbildung. Wir benutzen die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial^n A}{\partial r^n}(r,h) := \frac{\partial^n A}{\partial r^n}(r)(h,...,h).$$

Sei $n \in I\!N \cup \{\infty\}$. Eine $n-$mal Fréchet differenzierbare Abbildung $A : U \to X$ nennen wir F^n-**glatt**.

Wir wollen von der Fréchet Differenzierbarkeit eines Operators auf die Fréchet Differenzierbarkeit seiner Inversen schließen.

Satz 3.2 *Sei* Y *normierter Raum,* $U \subset Y$ *eine offene Menge und* X *eine Banach Algebra mit neutralem Element* e. *Die Abbildung* $A : U \to X$ *sei Fréchet differenzierbar in* $r_0 \in U$. *Ferner sei* W *eine Umgebung von* r_0, *so daß für alle* $r \in W$ *das Element* $A(r)$ *invertierbar in* X *und die Abbildung* $r \mapsto A^{-1}(r)$ *in* r_0 *stetig ist. Dann ist* $A^{-1}(r)$ *Fréchet differenzierbar in* r_0 *mit der Ableitung*

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial r}(r_0,h) = -A^{-1}(r_0)\frac{\partial A}{\partial r}(r_0,h)A^{-1}(r_0).$$

Beweis: Wir definieren

$$z(r_0,h) := A^{-1}(r_0+h) - A^{-1}(r_0) + A^{-1}(r_0)\frac{\partial A}{\partial r}(r_0,h)A^{-1}(r_0).$$

Wir haben die Beziehung $z(r_0, h) = o(\| h \|)$ nachzuweisen. Dazu multiplizieren wir von rechts und von links mit $A(r_0)$ und nutzen die stetige Invertierbarkeit und die Fréchet Differenzierbarkeit von A. Wir erhalten

$$\begin{aligned} A(r_0)z(r_0,h)A(r_0) &= (A(r_0+h)-A(r_0))A^{-1}(r_0+h)(A(r_0+h)-A(r_0)) \\ &\quad -(A(r_0+h)-A(r_0)-\frac{\partial A}{\partial r}(r_0,h)) \\ &= o(\| h \|) \end{aligned}$$

und daraus die Aussage des Satzes. □

Das folgende Lemma bereitet Satz 3.5 aus Abschnitt 3.3 vor. Es enthält den ersten Schritt der Taylorentwicklung einer zweimal Fréchet differenzierbaren Funktion.

Lemma 3.3 *Sei V eine offene Teilmenge eines normierten Raumes Y, $r_0 \in V$ und $f : V \to \mathbb{C}$ eine in einer Umgebung von r_0 zweimal stetig Fréchet differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes hinreichend kleine $h \in Y$ die Beziehung*

$$f(r_0+h) = f(r_0) + \frac{\partial f}{\partial r}(r_0,h) + f_1(r_0,h) \tag{3.7}$$

mit

$$f_1(r_0,h) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0+th,h)dt.$$

Beweis: Aus der Fréchet Differenzierbarkeit der Funktion f folgt die zweimalige reelle Differenzierbarkeit der Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto g(t) := f(r_0+th)$. Die Aussage des Lemmas erhält man nun durch zweimalige Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. □

Beispiele

Die folgenden Beispiele sind unmittelbar Grundlage des Abschnitts 3.4, in welchem die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne der in 3.1 definierten Potentialoperatoren nachgewiesen wird. Wir nutzen wie in Abschnitt 1.3 die Abkürzung $x_r := x + r(x)$ und entsprechend $y_r := y + r(y)$. Die Abbildung

$$g_1(x,y): \ \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to \mathbb{R}^3, \ \ r \mapsto x_r - y_r \tag{3.8}$$

ist für $x, y \in \partial D$ $F^\infty-$glatt. Als Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,h,x,y) &= h(x) - h(y), \\ \frac{\partial^\mu g_1}{\partial r^\mu}(r,h,x,y) &= 0 \qquad \mu \geq 2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Für alle $r \in \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}$ mit hinreichend kleinem $\rho \in I\!R$ folgt $x_r \neq y_r$ aus $x \neq y$. Somit ist für $n \in I\!N$ auch die Abbildung

$$g_2(x,y): \; \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to \mathbb{C}, \;\; r \mapsto |x_r - y_r|^{-n} \tag{3.10}$$

für $x, y \in \partial D, x \neq y$ $F^\infty-$glatt. Es gilt für $n = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,h,x,y) &= -\frac{\langle x_r - y_r, h(x) - h(y)\rangle}{|x_r - y_r|^3}, \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial r^2}(r,h,x,y) &= 3\,\frac{\langle x_r - y_r, h(x) - h(y)\rangle^2}{|x_r - y_r|^5} - \frac{\langle h(x) - h(y), h(x) - h(y)\rangle}{|x_r - y_r|^3}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir erhalten daraus auch die $F^\infty-$Glattheit der Abbildungen

$$\Phi(x,y): \; \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to \mathbb{C}, \;\; \Phi(r,x,y) := \frac{e^{i\kappa|x_r - y_r|}}{|x_r - y_r|} \tag{3.12}$$

und

$$\begin{aligned} &(\mathrm{grad}_x \Phi)(x,y): \; \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to \mathbb{C}, \\ &(\mathrm{grad}_x \Phi)(r,x,y) := i\kappa\,\frac{x_r - y_r}{|x_r - y_r|^2} e^{i\kappa|x_r - y_r|} - \frac{x_r - y_r}{|x_r - y_r|^3} e^{i\kappa|x_r - y_r|} \end{aligned} \tag{3.13}$$

für feste $x, y \in \partial D$ mit $x \neq y$. Die Ableitungen berechnet man mit Hilfe der Produktregel und Kettenregel analog zu denen von g_1 und g_2. Man erhält etwa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r,h,x,y) = \tag{3.14}$$

$$-\frac{\langle x_r - y_r, h(x) - h(y)\rangle}{|x_r - y_r|^3} e^{i\,\kappa\,|x_r - y_r|} + i\kappa\,\frac{\langle x_r - y_r, h(x) - h(y)\rangle}{|x_r - y_r|^2} e^{i\,\kappa\,|x_r - y_r|}.$$

Der Grad der Singularität in $|x-y|$ bleibt also bei der Fréchet Differentiation von Φ und – wie man nach Ausführung der Rechnungen sieht – auch bei der Differentiation von $\text{grad}_x \Phi$ erhalten. Auch die Abbildung

$$g_3(x,y): \ \mathcal{C}^{m,\alpha}_\rho \to \mathbb{C}, \ \ r \mapsto \Phi(x, y_r) \tag{3.15}$$

ist für feste $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ und $y \in \partial D$ als Funktion von r $F^\infty-$glatt. Als erste Ableitung erhält man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r,h,x,y) = \frac{\langle x-y_r, h(y)\rangle}{|x-y_r|^3} e^{i\,\kappa\,|x-y_r|} \ - \ i\kappa \frac{\langle x-y_r, h(y)\rangle}{|x-y_r|^2} e^{i\,\kappa\,|x-y_r|}. \tag{3.16}$$

Hier erhöht sich der Grad der Singulariät in $|x-y|$ bei jeder Fréchet Differentiation um eins. Ähnliche Terme erhält man für die Fréchet Ableitungen der Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x, y_r).$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts halten wir fest, daß es zum Nachweis der Fréchet Differenzierbarkeit einer auf ∂D definierten Funktion ausreicht, diese Differenzierbarkeit in lokalen Koordinaten einzusehen.

Lemma 3.4 *Gegeben seien ein Gebiet D mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand und eine Funktion $G : \mathcal{C}^{m,\alpha}_\rho \to C^{m,\alpha}(\partial D)$. Dann ist G genau dann Fréchet differenzierbar, wenn für alle lokalen Karten (U, V, Ψ) eines isometrischen Atlanten die Funktionen*

$$g : \mathcal{C}^{m,\alpha}_\rho \to C^{m,\alpha}(U, \mathbb{R}), r \mapsto G(r) \circ \Psi$$

Fréchet differenzierbar sind.

Beweis: I. Sei G Fréchet differenzierbar. Dann existiert eine Abbildung $\frac{\partial G}{\partial r} : \mathcal{C}^{m,\alpha}_\rho \times C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3) \to C^{m,\alpha}(\partial D)$ mit

$$G(r+h) - G(r) = \frac{\partial G}{\partial r}(r,h) + G_1(r,h) \tag{3.17}$$

und

$$\| G_1(r,h) \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)} = o(\| h \|_{C^{m,\alpha}(\partial D,\mathbb{R}^3)}). \tag{3.18}$$

Sei $\Psi : U \to V$ eine lokale Karte. Dann gilt also

$$G(r+h)\circ\Psi - G(r)\circ\Psi = \frac{\partial G}{\partial r}(r,h)\circ\Psi + G_1(r,h)\circ\Psi \tag{3.19}$$

und mit (1.13)

$$\| G_1(r,h)\circ\Psi \|_{C^{m,\alpha}(U)} \leq \frac{1}{C_{\mathcal{A},1}} \| G_1(r,h) \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)}, \tag{3.20}$$

d.h. $g(r) := G\circ\Psi$ ist Fréchet differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,h) = \frac{\partial G}{\partial r}(r,h)\circ\Psi.$$

II. Sei für eine Karte $\Psi : U \to V$ die Funktion $g(r) := G(r)\circ\Psi$ Fréchet differenzierbar. Dann gilt (3.19) und

$$\| g_1(r,h) \|_{C^{m,\alpha}(\partial D)} = o(\| h \|_{C^{m,\alpha}(\partial D,\mathbb{R}^3)}). \tag{3.21}$$

Wir setzen

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r,h,x) := \frac{\partial g}{\partial r}(r,h,\Psi^{-1}(x)), \qquad x\in V \tag{3.22}$$

Die rechte Seite von (3.22) hängt nicht von der lokalen Karte ab, denn sei $\overline{\Psi} : U \to V$ eine andere Karte, so daß $\overline{g}(r) := G(r)\circ\overline{\Psi}$ Fréchet differenzierbar ist, so gilt

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r}(r,h,\Psi^{-1}(x)) - \frac{\partial \overline{g}}{\partial r}(r,h,\overline{\Psi}^{\,-1}(x)) \right| = o(\| h \|)$$

und somit wegen der Linearität der ersten Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,h,\Psi^{-1}(x)) = \frac{\partial \overline{g}}{\partial r}(r,h,\overline{\Psi}^{\,-1}(x)).$$

Damit ist auch g_1 nicht von Ψ abhängig und wir erhalten die Aussage des Lemmas mit Hilfe der Kompaktheit des Randes ∂D. □

3.3 Ein Differentiationssatz

Der vorliegende Abschnitt enthält den für das dritte Kapitel zentralen Differentiationssatz 3.5. Er wird in den Abschnitten 3.5 und 3.6 dazu benutzt, die Fréchet Differenzierbarkeit der in Abschnitt 3.1 eingeführten Potentiale und Potentialoperatoren in verschiedenen Räumen nachzuweisen.

Die im folgenden betrachtete Situation läßt sich auf eine ganze Reihe von Integraloperatoren anwenden. Seien G_1 und G_2 Teilmengen von $I\!R^N$, $N = 2, 3$, σ ein ($\sigma-$endliches) Maß auf G_2 und $V \subset Y$ eine offene Teilmenge eines normierten Raumes Y. Es geht um die Fréchet Differenzierbarkeit von Integraloperatoren der Form

$$(A(r)\varphi)(x) := \int_{G_2} f(r,x,y)\varphi(y)d\sigma(y), \quad x \in G_1, r \in V. \tag{3.23}$$

Das Integral existiere im Sinne eines Cauchy Hauptwertes. Seien $\mathcal{F}_1 \subset C(G_1)$ und $\mathcal{F}_2 \subset C(G_2)$ normierte Räume und halten wir zunächst $r \in V$ fest, dann ist für geeignete Kerne $f(r,x,y)$ der Operator $A(r)$ ein beschränkter linearer Operator $A(r) : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$. Wir betrachten nun A als Abbildung $V \to BL(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$, studieren also die Abhängigkeit von r. Der folgende Satz sagt aus, daß man bei geeigneten Eigenschaften des Kerns f die Fréchet Ableitung des Operators A nach r durch Differentiation des Kerns nach r erhält. Die Ableitung wird dann durch den Operator

$$(A^{(1)}(r,h)\varphi)(x) := \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial r}(r,h,x,y)\varphi(y)d\sigma(y), \quad x \in G_1, r \in V, h \in Y \tag{3.24}$$

gegeben. Wir wollen Satz 3.5 zunächst im Überblick zusammenfassen: *Ist der Kern f des Operators A auf einer Umgebung V von r_0 zweimal stetig nach r Fréchet differenzierbar, existieren ferner die Integrale über die beiden Ableitungen des Kerns im Sinne eines Cauchy Hauptwertes und haben sie als Integraloperatoren dieselben Abbildungseigenschaften wie A (wobei alle Aussagen für das Integral über die zweite Fréchet Ableitung von f gleichmäßig auf V gelten sollen), so ist A in r_0 Fréchet differenzierbar und man erhält die Ableitung durch $A^{(1)}$.*

Wir schauen uns die mathematisch exakte Fassung an und nutzen dabei die Bezeichnung Ω_1 für die Einheitskugel im Raum Y sowie

$$\triangle_G := \{(x,y), x \in G_1, y \in G_2 \text{ mit } x = y\}.$$

Satz 3.5 *Seien G_1 und G_2 Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ für eine natürliche Zahl N, sei σ ein Maß auf G_2, $V \subset Y$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes Y und sei r_0 ein Punkt aus V. Wir arbeiten mit normierten Räumen $\mathcal{F}_1 \subset C(G_1)$ und $\mathcal{F}_2 \subset C(G_2)$. Sei $f : V \times ((G_1 \times G_2) \setminus \triangle_G) \to \mathbb{C}$ eine stetige Kernfunktion mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle $x \in G_1, y \in G_2$ mit $x \neq y$ ist die Funktion*

$$f(\cdot, x, y) : V \to \mathbb{C}$$

  zweimal stetig Fréchet differenzierbar .

- *Die Funktionen*

$$f(r, x, \cdot) : G_2 \setminus \{x\} \to \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, h, x, \cdot) : G_2 \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$$

  sind für alle $x \in G_1, r \in V$ und $h \in Y$ integrierbar im Sinne eines Cauchy Hauptwertes.

- *Die durch (3.23) und (3.24) gegebenen Operatoren $A(r)$ und $A^{(1)}(r, h)$ sind für alle $r \in V$ und $h \in Y$ Elemente von $BL(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$.*

- *Halten wir $x \in G_1$ und $h \in \Omega_1$ fest, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{G_2 \setminus \Omega_\epsilon(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, h, x, y) \varphi(y) d\sigma(y) \tag{3.25}$$

  gleichmäßig auf V. Es gilt ferner

$$\| \textstyle\int_{G_2} (\frac{\partial^2 f}{\partial r^2})(r, h, \cdot, y) \varphi(y) d\sigma(y) \|_{\mathcal{F}_1} \leq c \| \varphi \|_{\mathcal{F}_2}, \ \ \varphi \in \mathcal{F}_2 \tag{3.26}$$

  auf $V \times \Omega_1$ mit einer Konstanten c.

Dann ist A als Abbildung $V \to BL(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1), r \mapsto A(r)$ Fréchet differenzierbar im Punkt r_0 und die Ableitung $\frac{\partial A}{\partial r}(r, h)$ wird durch den Operator $A^{(1)}(r, h)$ gegeben.

Beweis: Für alle hinreichend kleinen h gilt $r_0 + h \in V$ und $r_0 + th \in V$ für alle $t \in [0,1]$. Nach Lemma 3.3 haben wir damit die Zerlegung

$$f(r_0 + h, x, y) = f(r_0, x, y) + \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, h, x, y) + f_1(r_0, h, x, y) \tag{3.27}$$

mit

$$f_1(r_0, h, x, y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0 + th, h, x, y) dt$$

für alle hinreichend kleinen $h \in Y$ und $(x, y) \in (G_1 \times G_2) \setminus \triangle_G$.
Unter Ausnutzung von (3.25) und (3.26) erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Fubini für stetige Funktionen und des Lebesgue'schen Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\| \textstyle\int_{G_2} f_1(r_0, h, \cdot, y)\varphi(y) d\sigma(y) \|_{\mathcal{F}_1} \\
&= \| \textstyle\int_{G_2} \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0 + th, h, \cdot, y) dt \; \varphi(y) \; d\sigma(y) \|_{\mathcal{F}_1} \\
&= \| \lim_{\epsilon \to 0} \textstyle\int_{G_2 \setminus \Omega_\epsilon(\cdot)} \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0 + th, h, \cdot, y) dt \; \varphi(y) \; d\sigma(y) \|_{\mathcal{F}_1} \\
&= \| \lim_{\epsilon \to 0} \textstyle\int_0^1 (1-t) \int_{G_2 \setminus \Omega_\epsilon(\cdot)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0 + th, h, \cdot, y) \varphi(y) d\sigma(y) \; dt \|_{\mathcal{F}_1} \\
&= \| \textstyle\int_0^1 (1-t) \int_{G_2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r_0 + th, h, \cdot, y) \varphi(y) d\sigma(y) \; dt \|_{\mathcal{F}_1} \\
&\leq \left(\int_0^1 c \| \varphi \|_{\mathcal{F}_2} dt \right) \| h \|^2 \\
&= c \| \varphi \|_{\mathcal{F}_2} \| h \|^2 .
\end{aligned}$$

Wir wissen, daß alle Terme der Gleichung (3.27) integrierbar sind über G_2 und alle Integrale beschränkte lineare Operatoren $\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ bilden. Nun nutzen wir die Linearität des Integrals und erhalten

$$(A(r_0 + h)\varphi)(x) = \int_{G_2} f(r_0 + h, x, y)\varphi(y) d\sigma(y) = \int_{G_2} f(r_0, x, y)\varphi(y) d\sigma(y)$$

$$+ \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, h, x, h)\varphi(y) d\sigma(y) + \int_{G_2} f_1(r_0, h, x, y)\varphi(y) d\sigma(y)$$

$$= (A(r_0)\varphi)(x) \quad + \quad (A^{(1)}(r_0, h)\varphi)(x) \quad + \quad (A_1(r_0, h)\varphi)(x),$$

wobei der Operator A_1 der Abschätzung

$$\| (A_1(r_0, h)\varphi) \|_{\mathcal{F}_1} \leq c \| \varphi \|_{\mathcal{F}_2} \| h \|^2$$

genügt. Demnach ist $A : V \to BL(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$ Fréchet differenzierbar im Punkt r_0 und die Fréchet Ableitung wird gegeben durch $A^{(1)}$.

$\square$

BEMERKUNG: Der Satz umfaßt die Fälle $G_1 = G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, schwach singulärer Kerne und stetiger Kerne. Für $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ können wir die Räume der stetigen wie auch der hölderstetigen oder hölderstetig differenzierbaren Funktionen wählen. Ein Spezialfall wird im folgenden Korollar festgehalten.

Korollar 3.6 *Mit den Bezeichnungen von Satz 3.5 sei $G_1 = \{x\}$ eine einelementige Menge, die Schnittmenge $G_1 \cap G_2$ leer, $\mathcal{F}_1$ die Menge der komplexen Zahlen mit mit der Norm $\| \, . \, \|_{\mathcal{F}_1} = | \cdot |$, $\mathcal{F}_2 = C(G_2)$ die Menge der auf G_2 stetigen Funktionen und f zweimal stetig differenzierbar, so daß*

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, h, x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, h, x, y)$$

als Funktionen von y stetig sind und außerdem beschränkt auf $V \times \Omega_1 \times \{x\} \times G_2$. Dann ist die Funktion $V \to \mathbb{C}$,

$$r \mapsto \int_{G_2} f(r, x, y)\varphi(y) ds(y)$$

Fréchet differenzierbar mit der Ableitung

$$\int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial r}(r, h, x, y)\varphi(y) ds(y).$$

$\square$

Das folgende Lemma enthält den Schluß von der Fréchet Differenzierbarkeit eines Operators A auf die Fréchet Differenzierbarkeit des Bildes $A\varphi$ für eine feste Dichte φ.

Lemma 3.7 *Sei $A : V \to BL(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$ Fréchet differenzierbar . Dann ist für alle $\varphi \in \mathcal{F}_2$ auch die Abbildung*

$$\hat{A} : V \to \mathcal{F}_1, r \mapsto A(r)\varphi$$

Fréchet differenzierbar . Die Ableitung wird gegeben durch

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial r}(r, h) = \frac{\partial A}{\partial r}(r, h)\varphi.$$

Beweis: Die Gültigkeit der entsprechenden Zerlegung für $\hat{A}$ folgt unmittelbar aus jener für A. □

3.4 Die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne von Potentialen und Potentialoperatoren

Wir überzeugen uns im vorliegenden Abschnitt von der $F^\infty-$Glattheit der Kerne der in Abschnitt 3.1 bereitgestellten Potentiale und Potentialoperatoren. Dazu wird die Differenzierbarkeit ihrer Bestandteile sukzessive nachgerechnet. Lemma 3.8 und 3.10 halten die $F^\infty-$Glattheit grundlegender differentialgeometrischer Ausdrücke fest. Die Definitionen und einige Eigenschaften dieser Ausdrücke findet man in den Abschnitten 1.3 und 1.4. Das Lemma 3.9 wird benötigt, um später die Singularität der $\mu-$fach differenzierten singulären und schwach singulären Kerne in $|x - y|$ abschätzen zu können. Sei μ dabei in diesem Abschnitt grundsätzlich Null oder eine natürliche Zahl. Die $F^\infty-$Glattheit der auf ∂D transformierten Kerne wird schließlich in Lemma 3.11 festgehalten. Dort werden dann auch die angesprochenen Abschätzungen für die Singularität der $\mu-$fach differenzierten Kerne in $|x - y|$ angegeben.

Lemma 3.8 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand und sei $\rho > 0$ hinreichend klein.*

I. Die Jacobideterminante

$$J_T : \mathcal{C}^{m,\alpha}_\rho \to C^{m-1,\alpha}(\partial D), r \mapsto J_T(r)$$

und der Normalenvektor

$$\nu : \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(\partial D), r \mapsto \nu(r)$$

sind $F^\infty-$*glatt.*

II. Sei $\mathcal{A}$ *ein isometrischer Atlas von* ∂D *und* $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ *der in Abschnitt 1.4 eingeführte Parameter, ferner sei* (U, V, Ψ) *aus* $\mathcal{A}$*. Die* Gram'sche Determinante

$$J : \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(U), r \mapsto J(r),$$

ist $F^\infty-$*glatt.*

III. Alle $\mu-$*ten Fréchet Ableitungen von* J_T, ν *und* J *sind auf* $\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}$ *beschränkt.*

Beweis: Betrachten wir die in Abschnitt 1.3 definierten Ausdrücke (1.2), (1.10) und (1.11). Die Komponenten der Funktion $N(r)$ sind quadratische Polynome in $\left\{\frac{\partial(r\circ\Psi)}{\partial u_i}\right\}$ und somit beliebig oft nach r Fréchet differenzierbar. Die $\mu-$te Ableitung ist nach Definition von $\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}$, (1.13) und

$$\| \tfrac{\partial(r\circ\Psi)}{\partial u_i} \|_{C^{m-1,\alpha}(U,\mathbb{R}^3)} \;\leq\; \frac{\rho}{C_{\mathcal{A},1}}, \quad \| \tfrac{\partial(h\circ\Psi)}{\partial u_i} \|_{C^{m-1,\alpha}(U,\mathbb{R}^3)} \;\leq\; \frac{1}{C_{\mathcal{A},1}} \tag{3.28}$$

für $r \in \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}, h \in \Omega_1(0) \subset C^{m,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)$ beschränkt auf $\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \times \Omega_1(0)$. Aus Lemma 1.4 entnehmen wir

$$|N(r,u)| \;\geq\; c \tag{3.29}$$

auf $\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \times U$. Da die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $C^\infty-$glatt ist, folgt die $F^\infty-$Glattheit von $J = |N|$. Die Beschränktheit der $\mu-$ten Fréchet Ableitung folgt aus der Beschränktheit der Ableitungen von N und aus (3.29). Die $F^\infty-$Glattheit von $\nu(r) = \frac{N(r)}{J(r)}$ und von $J_T(r) = \frac{J(r)}{J(0)}$ ergibt sich nun unmittelbar.

□

Die wesentliche Aussage des folgenden Lemmas besteht in den Abschätzungen (3.31). Sie ziehen später unmittelbar Abschätzungen für die differenzierten Kerne der in 3.1 betrachteten Operatoren nach sich und sind für die Beweise der Abbildungseigenschaften der differenzierten Potentialoperatoren von zentraler Bedeutung.

Lemma 3.9 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand, m eine natürliche Zahl, $\mu \in I\!N_0$ und $\rho > 0$ hinreichend klein. Dann sind die Abbildungen*

$$
\begin{aligned}
A_1^{(\mu)} :\ & \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(\partial D \times \partial D, I\!R^3), && r \mapsto \tfrac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \nu(r,x) - \nu(r,y) \right\}(h) \\
A_2^{(\mu)} :\ & \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(\partial D \times \partial D), && r \mapsto \tfrac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \langle \nu(r,y), x_r - y_r \rangle \right\}(h) \\
A_3^{(\mu)} :\ & \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(\partial D \times \partial D), && r \mapsto \tfrac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \langle \nu(r,x), x_r - y_r \rangle \right\}(h) \\
A_4^{(\mu)} :\ & \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(\partial D \times \partial D, I\!R^3), && r \mapsto \tfrac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \nu(r,x) \times (\nu(r,y) \times \nu(r,x)) \right\}
\end{aligned}
$$

$F^\infty-$glatt. Es gilt

$$
\frac{\partial^{\mu'}}{\partial r^{\mu'}} \left\{ A_j^{(\mu)} \right\}(r,h) = A_j^{(\mu+\mu')}(r,h), \qquad j = 1, ..., 4 \tag{3.30}
$$

und wir haben die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
\left| A_1^{(\mu)}(r,h,x,y) \right| &\le C_\mu \parallel h \parallel_{C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)}^\mu \ |x-y|^\alpha \\
\left| A_2^{(\mu)}(r,h,x,y) \right| &\le C_\mu \parallel h \parallel_{C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)}^\mu \ |x-y|^{1+\alpha} \\
\left| A_3^{(\mu)}(r,h,x,y) \right| &\le C_\mu \parallel h \parallel_{C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)}^\mu \ |x-y|^{1+\alpha} \\
\left| A_4^{(\mu)}(r,h,x,y) \right| &\le C_\mu \parallel h \parallel_{C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)}^\mu \ |x-y|^\alpha
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

mit von $r \in \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}, h \in C^{m,\alpha}(\partial D)$ unabhängigen Konstanten C_μ.

Beweis: I. Die $F^\infty-$Glattheit aller Abbildungen folgt unmittelbar aus der $F^\infty-$Glattheit des Normalenvektors. Die Formel (3.30) ist nach Definition der Abbildungen $A_j^{(\mu)}$ als $\mu-$te Fréchet Ableitung der Abbildung $A_j^{(0)}$ trivial. Wir weisen die angegeben Abschätzungen nach. Sei $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D

und $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ der in Abschnitt 1.4 definierte Parameter. Es genügt, die Beziehung (3.31) in einer lokalen Karte aus $\mathcal{A}$ nachzurechnen.

II. Betrachten wir A_1. Anhand von (1.2) überzeugt man sich davon, daß

$$\frac{\partial^\mu \nu}{\partial r^\mu}(r, h) \circ \Psi$$

eine in U hölderstetige Funktion darstellt, die homogen von der Ordnung μ in den ersten Ableitungen von h ist. Die Hölderkonstante hängt nicht von der speziellen Karte des isometrischen Atlanten ab. Daraus folgt (3.31) für A_1.

III. Der Term $A_2^{(\mu)}$ wird – vgl. (1.2) – in lokalen Koordinaten durch

$$\Big(A_2^{(\mu)}(r,h) \circ \Psi\Big)(u,v) = \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\Big\langle \frac{N(r,v)}{J(r,v)}, (\Psi + r \circ \Psi)(u) - (\Psi + r \circ \Psi)(v)\Big\rangle(h) \quad (3.32)$$

mit $u, v \in U$ gegeben. Für festes $v \in U$ ist die Funktion

$$g(u) := \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\Big\langle \frac{N(r,v)}{J(r,v)}, (\Psi + r \circ \Psi)(u)\Big\rangle(h) \qquad u \in U$$

in U hölderstetig differenzierbar. Die Hölderkonstante L der Ableitung hängt nicht von der Karte $\Psi \in \mathcal{A}$, von $r \in \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}$ und von $h \in \mathcal{C}_1^2$ ab. Es gilt

$$g(u+s) = g(u) + \Big\langle (\mathrm{grad} g)(u), s\Big\rangle + \int_0^1 \Big\langle (\mathrm{grad} g)(u+ts) - (\mathrm{grad} g)(u), s\Big\rangle dt. \quad (3.33)$$

Durch eine elementare, aber lange Rechnung kann die Beziehung

$$(\mathrm{grad} g)(v) = 0$$

nachgewiesen werden, bei der mehrfach die Orthogonalität von ν und den Tangentialvektoren ausgenutzt wird. Wir verzichten hier auf eine Darstellung. Es folgt aus (3.33) die Abschätzung (3.31) für A_2. Einen Beweis für die Abschätzung von A_3 erhält man analog nach Vertauschen der Rollen von u und v.

IV. Die Abschätzung für A_4 erhalten wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \nu(r,x) \times \Big(\nu(r,y) \times \nu(r,x)\Big) &= \nu(r,y)\Big\langle \nu(r,x), \nu(r,x) - \nu(r,y)\Big\rangle \\ &\quad -[\nu(r,y) - \nu(r,x)]\Big\langle \nu(r,x), \nu(r,y)\Big\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

aus der Abschätzung für A_1. □

Wir halten im folgenden Lemma die Fréchet Differenzierbarkeit weiterer differentialgeometrischer Ausdrücke fest.

Lemma 3.10 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{m,\alpha}-$glattem Rand, $m \geq 1$ bzw. $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D und sei $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ der in Abschnitt 1.4 definierte Parameter. Der* erste Fundamentaltensor

$$g_{j,k}: \ \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-1,\alpha}(U), \ \ r \mapsto g_{j,k}(r), \tag{3.35}$$

der zweite Fundamentaltensor

$$b_{j,k}: \ \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-2,\alpha}(U), \ \ r \mapsto b_{j,k}(r), \tag{3.36}$$

die mittlere Krümmung

$$H: \ \mathcal{C}_\rho^{m,\alpha} \to C^{m-2,\alpha}(\partial D), \ \ r \mapsto H_{j,k}(r), \tag{3.37}$$

der Oberflächengradient

$$\mathrm{Grad}_T: \mathcal{C}_\rho^2 \to B(C^{1,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D, I\!R^3)), \ \ r \mapsto \mathrm{Grad}_T(r) \tag{3.38}$$

und die Oberflächendivergenz

$$Div_T: \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to B(C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3), C^{0,\alpha}(\partial D)), \ \ r \mapsto \mathrm{Div}_T(r) \tag{3.39}$$

sind $F^\infty-$glatt. Alle $\mu-$ten Fréchet Ableitungen sind auf $\mathcal{C}_\rho^{m,\alpha}$ beschränkt.

Beweis: Die $F^\infty-$Glattheit von $g_{j,k}, b_{j,k}$ und H und die Schranken für die Ableitungen erhält man unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (1.3), (1.4) und (1.7) mit Hilfe elementarer Überlegungen und Lemma 3.8. Mit $g_{j,k}$ ist auch die Determinante $\det G$ und die inverse Matrix $g^{i,j}$ $F^\infty-$glatt. Schranken für die Ableitungen erhält man mit Hilfe von (1.26) und den Schranken des isometrischen Atlanten. Die $F^\infty-$Glattheit des Oberflächengradienten folgt wegen der Glattheit der $g^{i,j}$ aus (1.8). Auch die Beschränktheit der Fréchet Ableitungen kann man daran ablesen. Zum Nachweis der $F^\infty-$Glattheit der Oberflächendivergenz betrachten wir (1.19) und (1.20) mit einem Vektorfeld $a(r) \equiv a, a \in C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$. Es ist

$$a_1: \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to B(C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3), C^{1,\alpha}(\partial D)), \ \ a \mapsto a_1(r)$$

$F^\infty-$glatt mit beschränkten Ableitungen auf $\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}$. $\mathrm{Div}_T(r)a$ ist ein Polynom vom Grad eins in a_1 und $\frac{\partial a_1}{\partial u_1}$ und somit $F^\infty-$glatt als Abbildung

$$C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3) \to C^{0,\alpha}(\partial D), a_1 \mapsto \mathrm{Div}_T(r)a$$

mit auf $\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}$ beschränkten Ableitungen. Ferner hängen die Koeffizienten $F^\infty-$glatt von $r \in \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}$ ab und ihre Ableitungen sind auf $\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}$ beschränkt. Zusammen erhält man die Glattheit der Abbildung Div_T und die Beschränktheit der $\mu-$ten Fréchet Ableitung für jedes $\mu \in I\!N_0$. □

Es folgt der zentrale Satz des Abschnitts, in welchem die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne der in Abschnitt 3.1 eingeführten Potentiale und Potentialoperatoren festgehalten wird. Die darüber hinaus angegebenen Abschätzungen (3.41) und (3.42) werden in den Abschnitten 3.5 und 3.6 zum Nachweis der Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren mit diesen Kernen benutzt.

Lemma 3.11 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $\rho > 0$ hinreichend klein.*

I. Sei G eine offene Menge mit $\overline{G} \subset I\!R^3 \setminus \partial D$ und $d(G, D) > \rho$. Die durch die Kerne $\mathcal{K}_L$ der Operatoren L gegebenen Funktionen $\mathcal{K}_L$,

$$\mathcal{K}_L(\cdot, x, y): \ \ \mathcal{C}_\rho^2 \to \mathbb{C}, \ \ r \mapsto \mathcal{K}_L(r, x, y) \tag{3.40}$$

sind im Fall

a) $L \in \{S_1, S_2, E_1, E_2\}$

für feste $x \in G, y \in \partial D$, in den Fällen

b) $L \in \left\{S, S_\nu, K, K^*, \hat{M}_{i,j}\right\}$

und

c) $L = \hat{T}_j$

für feste $x, y \in \partial D, x \neq y$ jeweils $F^\infty-$glatt.

II. Im Fall a) ist die $\mu-$te Fréchet Ableitung auf G beliebig oft nach x differenzierbar. Die Ableitung ist auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_1^2 \times G \times \partial D$ beschränkt. Im Fall b) gelten die Abschätzungen

$$\left|\frac{\partial^\mu \mathcal{K}_L}{\partial r^\mu}(r, h, x, y)\right| \ \leq \ C_\mu \parallel h \parallel^\mu_{C^2(\partial D)} \frac{1}{|x-y|}, \tag{3.41}$$

für $x, y \in \partial D, x \neq y, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ *und*

$$\left| \frac{\partial^\mu \mathcal{K}_L}{\partial r^\mu}(r,h,x_1,y) - \frac{\partial^\mu \mathcal{K}_L}{\partial r^\mu}(r,h,x_2,y) \right| \tag{3.42}$$

$$\leq \ C_\mu \ \| \, h \, \|_{C^2(\partial D)}^\mu \ \sum_{j=1}^M |x_1 - y|^{-1-j} \ |x_1 - x_2|^j$$

für $x_1, x_2 \in \partial D, \ 2\,|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|, \ r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ *mit Konstanten* $C_\mu > 0$ *und* $M \in I\!N$. *Im Fall c) ist die* $\mu-$*te Fréchet Ableitung von* $\mathcal{K}_{\hat{T}_j}$ *echt singulär. Sie besteht für* $\kappa = 0$ *aus einer Linearkombination von Termen der Form* (2.60) *und* (2.61). *Für* $\kappa \neq 0$ *treten schwach singuläre Terme, welche den Abschätzungen* (3.41) *und* (3.42) *genügen, hinzu.*

Beweis: I. Die $F^\infty-$Glattheit aller Kerne folgt aus der Glattheit ihrer Bestandteile, welche in Abschnitt 3.2 und den Lemmas 3.8 und 3.9 festgehalten ist.

II. Die $\mu-$te Fréchet Ableitung jedes Kerns kann analog zu den Rechnungen aus Abschnitt 3.2 berechnet werden. Jede Ableitung eines Kerns $\mathcal{K}_L$ mit

$$L \in \{S_1, S_2, E_1, E_2\}$$

ist jeweils stetig auf $\overline{G} \times \partial D$ und gleichmäßig beschränkt auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times G \times \partial D$. Das folgt aus der Beschränktheit der Ableitungen des Normalenvektors auf $\mathcal{C}_\rho^2 \times \partial D$, der Form der Ableitungen von Φ und gradΦ – vgl. Abschnitt 3.2 – und

$$d(G, \partial D) > \rho.$$

Im potentialtheoretischen Fall $\kappa = 0$ berechnen wir induktiv die $\mu-$te Fréchet Ableitung von $\mathcal{K}_L$ für

$$L \in \{S, S_\nu, K\}.$$

Sie besteht für S und S_ν aus Linearkombinationen von Termen der Form

$$\frac{\Big\langle h(x) - h(y), h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_1} \Big\langle x_r - y_r, h(x) - h(y) \Big\rangle^{k_2}}{|x_r - y_r|^{k_3}} \cdot \frac{\partial^j J_T}{\partial r^j}(r,h,y) \tag{3.43}$$

und

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial r^{j_1}}\Big\langle \nu(r,x),\nu(r,y)\Big\rangle(h)\cdot \tag{3.44}$$
$$\frac{\Big\langle h(x)-h(y),h(x)-h(y)\Big\rangle^{k_1}\Big\langle x_r-y_r,h(x)-h(y)\Big\rangle^{k_2}}{|x_r-y_r|^{k_3}}\cdot\frac{\partial^{j_2}J_T}{\partial r^{j_2}}(r,h,y),$$

mit Indizes $j,j_i,k_i\in I\!N_0$, die den Beziehungen

$$j\le\mu,\quad 2k_1+2k_2-k_3=-1,\quad 2k_1+k_2=\mu-j$$

bzw.

$$j_1+j_2\le\mu,\quad 2k_1+2k_2-k_3=-1,\quad 2k_1+k_2=\mu-j_1-j_2$$

genügen. Für K erhalten wir

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial r^{j_1}}\Big\langle \nu_r(y),(x_r-y_r)\Big\rangle(h)\cdot \tag{3.45}$$
$$\frac{\Big\langle h(x)-h(y),h(x)-h(y)\Big\rangle^{k_1}\Big\langle x_r-y_r,h(x)-h(y)\Big\rangle^{k_2}}{|x_r-y_r|^{k_3}}\cdot\frac{\partial^{j_2}J_T}{\partial r^{j_2}}(r,h,y),$$

mit Indizes $j_1,j_2,k_i\in I\!N_0$, für die

$$j_1+j_2\le\mu,\quad 2k_1+2k_2-k_3=-3,\quad 2k_1+k_2=\mu-j_1-j_2$$

gilt. Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Kerne von K^* und $\hat{M}_{i,j}$. Wir wollen hier nicht alle Rechnungen ausführen. Für $\kappa\neq 0$ erhält man zusätzliche Terme, die aber genauso behandelt werden können. Wir beschränken uns im folgenden auf die Darstellung der Rechnungen für $\kappa=0$. Die Abschätzung (3.41) erhält man nun mit Hilfe der Lemmas (3.8) und (3.9), wobei in Lemma (3.9) $\alpha=1$ gewählt werden darf. Wir wollen die Abschätzung (3.42) nachweisen. Die Kerne $\frac{\partial^\mu\mathcal{K}_S}{\partial r^\mu}$ und $\frac{\partial^\mu\mathcal{K}_{S_\nu}}{\partial r^\mu}$ sind für feste $y\in\partial D$ nach x differenzierbar auf $\partial D\setminus\{y\}$. Mit Hilfe der Schranken für die Oberflächengradienten bzw. Gradienten von $r,h,\frac{\partial^j\nu}{\partial r^j}$ und $\frac{\partial^j J_T}{\partial r^j}$ für $j=0,...,\mu$ berechnen wir Schranken für die Oberflächengradienten $\mathrm{Grad}\frac{\partial^\mu\mathcal{K}_S}{\partial r^\mu}$ und $\mathrm{Grad}\frac{\partial^\mu\mathcal{K}_{S_\nu}}{\partial r^\mu}$ der Form

$$\left|\mathrm{Grad}_x\frac{\partial^\mu\mathcal{K}_L}{\partial r^\mu}(r,h,x,y)\right|\ \le\ C_\mu\parallel h\parallel^\mu_{C^2(\partial D,I\!R^3)}\frac{1}{|x-y|^2} \tag{3.46}$$

für $x, y \in \partial D, x \neq y, r \in W^{2,l}, h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ und daraus die Abschätzung (3.42) mit $M = 1$. Für die Behandlung des Kerns $\frac{\partial^\mu \mathcal{K}_K}{\partial r^\mu}$ nutzen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\langle \nu(r,y), (x_1)_r - y_r \Big\rangle (h) - \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\langle \nu(r,y), (x_2)_r - y_r \Big\rangle (h) \right| \\
= \;& \left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\langle \nu(r,y), (x_1)_r - (x_2)_r \Big\rangle (h) \right| \qquad (3.47) \\
\leq \;& \left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\langle \nu(r,y) - \nu(r,x_1), (x_1)_r - (x_2)_r \Big\rangle (h) \right| \\
& \qquad + \left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\langle \nu(r,x_1), (x_1)_r - (x_2)_r \Big\rangle (h) \right| \\
\leq \;& C \| \, h \, \|^j_{C^2(\partial D, I\!R^3)} \Big\{ \, |y - x_1| \; |x_1 - x_2| \; + \; |x_1 - x_2|^2 \, \Big\}
\end{aligned}$$

und gehen dann wie bei der Behandlung von S und S_ν vor. Wir erhalten daraus (3.42) mit $M = 2$. K^* und $\hat{M}_{i,j}$ werden mit denselben Mitteln bearbeitet.

III. Die Form der Ableitung des Kerns $\hat{T}_j$ wird induktiv in der bei den anderen Operatoren benutzten Weise berechnet.

□

3.5 Die Fréchet Differenzierbarkeit von Operatoren in den Räumen der hölderstetigen Funktionen

Das Ziel dieses Abschnitts ist Satz 3.14, in welchem die Fréchet Differenzierbarkeit der in Abschnitt 3.1 bereitgestellten Potentiale und Potentialoperatoren in den Räumen der stetigen und hölderstetigen Funktionen bewiesen wird. Er beruht auf einer Anwendung von Satz 3.5 aus Abschnitt 3.3. Ein Teil der Voraussetzungen dieses Satzes an die Kerne der Operatoren – die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne – wurde in Abschnitt 3.4 nachgewiesen. Es bleiben noch die Abbildungseigenschaften der Integrale mit den differenzierten Kernen zu studieren. Dies erfolgt in Satz 3.12 und dem sich anschließenden Korollar 3.13.

Bezeichnungen

Wir wollen zunächst für die Integrale mit den differenzierten Kernen eine naheliegende Schreibweise einführen. Sei L ein Operator aus der Menge

$$\left\{S_1, S_2, E_1, E_2, S, S_\nu, K, K^*, \hat{T}_j, \hat{M}_{i,j}\right\}$$

und μ eine natürliche Zahl. Wir ersetzen den Integranden des Operators L durch dessen $\mu-$te Fréchet Ableitung nach r und bezeichnen den entstehenden Operator mit $L^{(\mu)}$. Die Operatoren $T_i^{(\mu)}$ und $T^{(\mu)}$ werden mit Hilfe der Gleichungen (3.5) und (3.3) definiert, wobei wir auf der rechten Seite jeweils die Operatoren S_ν und $\hat{T}_j$ durch $S_\nu^{(\mu)}$ bzw. $\hat{T}_j^{(\mu)}$ ersetzen. In Satz 3.14 wird gezeigt, daß die $\mu-$te Fréchet Ableitung des Operators L durch den Operator $L^{(\mu)}$ gegeben wird.

Die Abbildungseigenschaften der Operatoren

Wir untersuchen im folgenden Satz die Abbildungseigenschaften der Operatoren $L^{(\mu)}$ in den Räumen der stetigen und hölderstetigen Funktionen.

Satz 3.12 *Sei D ein Gebiet mit C^2-glattem Rand, $\rho > 0$ ein hinreichend kleiner reeller Parameter, $\mu \in I\!N_0$ und $\alpha \in (0,1)$.*

I. Sei G eine offene Menge mit $\overline{G} \subset I\!R^3 \setminus \partial D$ und $d(G,D) > \rho$. Wir betrachten einen Operator L aus $\{S_1, S_2, E_1, E_2\}$ und eine Zahl $\xi \in I\!N_0$. Dann gilt für alle $r \in \mathcal{C}_\rho^2$ und $h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ die Beziehung

$$L^{(\mu)}(r,h) \in BL(C(\partial D), C^\xi(G)). \tag{3.48}$$

Die Menge

$$\left\{\| \, L^{(\mu)}(r,h) \, \|_{BL(C(\partial D),C^\xi(G))}, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in \mathcal{C}_1^2\right\}$$

ist beschränkt in $I\!R$.

II. Im Fall $L \in \left\{S, S_\nu, K, K^*, \hat{M}_{i,j}\right\}$ gilt für alle $r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ die Beziehung

$$L^{(\mu)}(r,h) \in BL(C(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)). \tag{3.49}$$

Es ist

$$\left\{\| \, L^{(\mu)}(r,h) \, \|_{BL(C(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D))}, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in \mathcal{C}_1^2\right\}$$

beschränkt in $I\!R$.

III. Sei nun $L = \hat{T}_j$. *Dann existiert das Integral von* $\hat{T}_j^{(\mu)}\chi, \chi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, *als Cauchy-Hauptwertintegral gleichmäßig auf* $\mathcal{C}_\rho^2 \times \mathcal{C}_1^2 \times \partial D$. *Es gilt für alle* r *aus* $\mathcal{C}_\rho^2$ *und* h *aus* $C^2(\partial D, I\!R^3)$ *die Beziehung*

$$\hat{T}_j^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)). \tag{3.50}$$

Die Menge

$$\left\{\| \hat{T}_j^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D))}, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in \mathcal{C}_1^2\right\}$$

ist beschränkt in $I\!R$.

Beweis: I. Sei L aus $\{S_1, S_2, E_1, E_2\}$. Dann hat der Integraloperator $L^{(\mu)}$ nach Lemma 3.11, Teil I. einen in G nach x stetig differenzierbaren Kern. Der Integrationsbereich ∂D ist kompakt mit $s(\partial D) < \infty$. Wir können also die Ableitungen von $L^{(\mu)}\varphi$ durch Differentiation des Kerns berechnen. Die Abbildungseigenschaften ergeben sich aus der Stetigkeit und den Schranken für die Ableitungen des Kerns.

II. Die Abbildungseigenschaften der Operatoren $L^{(\mu)}$ für $L \in \left\{S, S_\nu, K, K^*, \hat{M}_{i,j}\right\}$ erhält man aus Lemma 3.11, Teil II. nach Satz 2.4.

III. Der letzte Teil des Satzes ergibt sich aus Lemma 3.11, Teil II.c) mit Hilfe der Sätze 2.4 und 2.6.

$\square$

Korollar 3.13 *I. Sei* $D \subset I\!R^3$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^2-*glattem Rand,* $\rho > 0$ *hinreichend klein,* $\mu \in I\!N_0$, $\alpha \in (0,1)$. *Dann gelten für alle* $r \in \mathcal{C}_\rho^2$ *und* $h \in C^2(\partial D)$ *die Beziehungen*

$$T_i^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)) \tag{3.51}$$

und

$$T^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{1,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)). \tag{3.52}$$

II. Sei ∂D *nun* $C^{2,\alpha}-$*glatt. Dann gilt für alle* $r \in \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}, h \in C^{2,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ *die Beziehung*

$$N^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{1,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3)). \tag{3.53}$$

III. Die Mengen

$$\Big\{ \| T_i^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D))}, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in \mathcal{C}_1^2 \Big\},$$

$$\Big\{ \| T^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{1,\alpha}(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D))}, r \in \mathcal{C}_\rho^2, h \in \mathcal{C}_1^2 \Big\}$$

und

$$\Big\{ \| N^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{1,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3),C^{0,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3))}, r \in \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}, h \in \mathcal{C}_1^{2,\alpha} \Big\}$$

sind beschränkt in $\mathbb{R}$.

Beweis: Die Aussagen für T_i und T folgen aus den Gleichungen (3.3) und (3.5) mit Hilfe der Lemmas 3.8, 3.10 und Satz 3.12. Die Aussagen für N erhält man ebenfalls aus Lemma 3.8, 3.10 und Satz 3.12 mit Hilfe der Kettenregel. □

Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Operatoren

Der Inhalt des folgenden Satzes ist die Fréchet Differenzierbarkeit der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Potentialoperatoren in den Räumen der stetigen und hölderstetigen Funktionen. Auf ihm und Satz 3.18 beruht im vierten Kapitel der Nachweis der Fréchet Differenzierbarkeit der Randwertprobleme.

Satz 3.14 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand, $\rho > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0,1)$.*

I. Sei G eine offene Menge mit $\overline{G} \subset \mathbb{R}^3 \backslash \partial D$, $d(G,D) > \rho$ und $\xi \in \mathbb{N}_0$. Betrachten wir einen der Operatoren $L \in \{S_1, S_2, E_1, E_2\}$. Dann ist die Abbildung

$$L: \ \mathcal{C}_\rho^2 \to BL(C(\partial D), C^\xi(G)), \ \ r \mapsto L(r,h) \tag{3.54}$$

$F^\infty-$glatt.

II. Sei nun L aus $\Big\{ S, S_\nu, K, K^*, \hat{M}_{i,j} \Big\}$. Die Abbildung

$$L: \ \mathcal{C}_\rho^2 \to BL(C(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)), \ \ r \mapsto L(r) \tag{3.55}$$

ist $F^\infty-$glatt.

III. Die Abbildung

$$\hat{T}_j: \quad \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)), \quad r \mapsto \hat{T}_j(r) \tag{3.56}$$

ist $F^\infty-$glatt.

Die $\mu-$te Fréchet Ableitung – $\mu \in \mathbb{N}$ – des Operators L wird in allen betrachteten Fällen durch den Operator $L^{(\mu)}$ gegeben.

Beweis: Alle Aussagen folgen aus Satz 3.5. Die Differenzierbarkeit der Kerne wird in Lemma 3.11 festgehalten, die Abbildungseigenschaften der Integrale über die differenzierten Kerne in Satz 3.12. □

Korollar 3.15 *I. Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand, $\rho > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0,1)$. Dann sind die Abbildungen*

$$T_i: \quad \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)), \quad r \mapsto T_i(r) \tag{3.57}$$

und

$$T: \quad \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C^{1,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)), \quad r \mapsto T(r) \tag{3.58}$$

jeweils $F^\infty-$glatt.

II. Sei ∂D nun $C^{2,\alpha}-$glatt. Dann ist die Abbildung

$$N: \quad \mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho \to BL(C^{1,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3)), \quad r \mapsto N(r) \tag{3.59}$$

$F^\infty-$glatt.

III. Die $\mu-$te Fréchet Ableitung des Operators T_i, T bzw. N wird durch den Operator $T_i^{(\mu)}$, $T^{(\mu)}$ bzw. $N^{(\mu)}$ gegeben.

Beweis: Die Aussagen für T_i und T folgen aus den Gleichungen (3.3) und (3.5) mit Hilfe der Lemmas 3.8, 3.10 und Satz 3.14. Auf die gleiche Weise erhält man die Aussage für den in Abschnitt 3.1 definierten Operator N. □

3.6 Die Fréchet Differenzierbarkeit von Operatoren in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen

In diesem letzten Abschnitt des dritten Kapitels geht es um den Nachweis der Fréchet Differenzierbarkeit der in Abschnitt 3.1 bereitgestellten Potentialoperatoren S, K und K^* in den Räumen der hölderstetig *differenzierbaren* Funktionen. Dies wird in Satz 3.18 ausgeführt. Der Satz beruht auf einer Anwendung des Satzes 3.5 aus Abschnitt 3.3. Ein Teil der Voraussetzungen dieses Satzes – die Fréchet Differenzierbarkeit der Kerne der Operatoren – wurde in Abschnitt 3.4 nachgewiesen. Es bleiben die Abbildungseigenschaften der Integrale über die differenzierten Kerne zu studieren. Wir benutzen dabei die zu Beginn des Abschnitts 3.5 eingeführten Bezeichnungen $L^{(\mu)}$ für denjenigen Integraloperator, der aus dem Integraloperator L durch Ersetzen des Kernes durch seine $\mu-$te Fréchet Ableitung entsteht. Die Abbildungseigenschaften der Operatoren $L^{(\mu)}$ in den Räumen der stetigen und hölderstetigen Funktionen wurde schon in Abschnitt 3.5 untersucht. Hier soll es nun um den Nachweis der Existenz des Oberflächengradienten $\mathrm{Grad} L^{(\mu)}\varphi$ der Funktion $L^{(\mu)}\varphi$ bei geeigneter Dichte φ und eine Abschätzung für die Höldernorm des Oberflächengradienten gehen. Die zentralen Aussagen macht Satz 3.17.

Wir stellen in einem ersten Unterabschnitt zunächst Einzelheiten zur Berechnung des Oberflächengradienten und ein technisches Lemma dar.

Technische Details zum Oberflächengradienten

Wir nutzen zum Beweis des Satzes 3.17 zwei verschiedene Möglichkeiten, die Existenz des Oberflächengradienten einer durch einen Integraloperator $L^{(\mu)}$ definierten Funktion $L^{(\mu)}\varphi$ nachzuweisen. Der erste Weg nutzt den in Abschnitt 1.6 dargestellten Satz 1.6, wir verwenden ihn zum Nachweis der Abbildungseigenschaften der Operatoren $S^{(\mu)}$. Der zweite Weg besteht in direkten Berechnung des Differentialquotienten der Funktion $L^{(\mu)}\varphi$ auf der Fläche ∂D. Er wird im folgenden unter I. und II. beschrieben und im Satz 3.17 auf die Operatoren $K^{(\mu)}$ und $K^{*,(\mu)}$ angewandt. Unter III. und IV. bereiten wir bestimmte Abschätzungen der Kerne von $K^{(\mu)}$ und $K^{*,(\mu)}$ vor.

I. Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand. $\mathcal{A}$ sei ein isometrischer Atlas von ∂D, $V \subset \partial D$ und $U \subset I\!R^2$ mit $(U, V, \Psi) \in \mathcal{A}$. Sei $\tau(x) \in T(\partial D, x)$ ein Tangentialvektor an ∂D im Punkt $x = \Psi(u) \in \partial D$ mit $\| \tau(x) \| = 1$. Dann existiert ein $v \in I\!R^2$ mit $\tau(x) = (D\Psi)(u) \circ v$. Wir setzen $\phi(s) := \Psi(u + s \cdot v)$ für $|s| \leq s_0$ mit einem hinreichend kleinen s_0. $\phi([-s_0, s_0])$ ist ein C^2-glattes Kurvenstück in ∂D mit $\phi(0) = x$ und $\frac{\partial \phi}{\partial s}(0) = \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u) v_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(u) v_2 = (D\Psi)(u) \circ v = \tau(x)$. Es gibt also eine Funktion $\phi_1 : [-s_0, s_0] \to \partial D$ mit

$$\phi(s) - \phi(0) = s \cdot \tau(x) + \phi_1(s) \tag{3.60}$$

und

$$|\phi_1(s)| \ \leq \ \| \phi \|_{BC^2(U)} |s|^2 .$$

Wir nennen ein solches ϕ eine *Oberflächenkurve* von D durch x zum Tangentialvektor $\tau(x)$.

II. Sei F eine Funktion $F : V \to \mathbb{C}$. F ist *stetig differenzierbar* genau dann, wenn

$$(D_{\tau(x)} F)(x) := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left\{ (F \circ \phi)(s) - (F \circ \phi)(0) \right\}$$

existiert für alle Oberflächenkurven ϕ von D durch $x \in V$ zu normierten Tangentialvektoren $\tau(x) \in T(\partial D, x)$ und wenn für jedes $\tau \in NCT(V), V \subset \partial D$ die Funktion $D_\tau F : V \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Es sollen die *Oberflächengradienten* der Kerne der Operatoren $S^{(\mu)}$, $K^{(\mu)}$ und $K^{*,(\mu)}$ berechnet und Abschätzungen für die Differenz zwischen dem jeweiligen Differenzenquotienten auf ∂D und dem Oberflächengradienten hergeleitet werden. Im Beweis von Satz 3.17 werden diese Abschätzungen weiterverarbeitet.

III. Sei F eine Funktion aus $BC^1(V)$. Dann existiert der Oberflächengradient von F. Es gilt mit $x = \Psi(u)$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\Big\langle \tau(x), \mathrm{Grad} F(x) \Big\rangle \ &= \ \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(u) \cdot v_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}(u) \cdot v_2, \\
&\qquad \sum_{i,j=1}^{2} g^{i,j}(u) \frac{\partial (F \circ \Psi)}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \Psi}{\partial u_j}(u) \Big\rangle \\
&= \ \sum_{i,j,k=1}^{2} v_k \frac{\partial (F \circ \Psi)}{\partial u_i}(u) g^{i,j}(u) \Big\langle \frac{\partial \Psi}{\partial u_k}(u), \frac{\partial \Psi}{\partial u_j}(u) \Big\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k=1}^{2} v_k \frac{\partial(F \circ \Psi)}{\partial u_i}(u) g^{i,j}(u) g_{j,k}(u) \\
&= \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial(F \circ \Psi)}{\partial u_i}(u) \\
&= \Big\langle v, \mathrm{grad}(F \circ \Psi)(u) \Big\rangle \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Wegen (3.60) und (3.61) können wir für $F \in BC^2(V)$ die Differenz zwischen dem Differenzenquotienten und dem Oberflächengradienten abschätzen durch

$$(F \circ \phi)(s) - (F \circ \phi)(0) - s \cdot \Big\langle \tau(x), \mathrm{Grad}F(x) \Big\rangle = \tilde{F}_1(s) \qquad (3.62)$$

mit

$$\Big|\tilde{F}_1(s)\Big| \leq C \| \, F \, \|_{BC^2(V)} \, |s|^2 \, .$$

Wir nutzen die Abkürzungen $x_s := \phi(s)$ und $x := \phi(0)$. Aus (3.60) folgt die Beziehung

$$|x_s - x| = s \; + \tilde{\phi}_1(s) \qquad (3.63)$$

mit

$$\Big|\tilde{\phi}_1(s)\Big| \leq \| \, \phi \, \|_{BC^2(\partial D)} \, |s|^2$$

und durch Auflösen nach τ die Gleichung

$$\tau(x) = \frac{x_s - x}{|x_s - x|} \; + \; O(|s|^2) \qquad (3.64)$$

Wir erhalten damit die folgende Gleichung

$$F(x_s) - F(x) = |x_s - x| \Big\langle \tau(x), (\mathrm{Grad}F)(x) \Big\rangle \; + \; F_1(x_s, x) \qquad (3.65)$$

mit

$$|F_1(x_s, x)| \leq C \| \, F \, \|_{BC^2(V)} \, |x_s - x|^2 \, .$$

In dieser Gleichung kommen wir ohne den Gebrauch lokaler Koordinaten aus.

IV. Wir wollen uns jetzt spezielle Funktionen ansehen. Für die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor b nutzen wir dabei die Schreibweise $A \circ b$,

$\mathbb{1}$ bezeichnet die Einheitsmatrix. Betrachten wir die für $x \in V$ und $y \in \partial D \setminus \overline{V}$ durch $F(x) := |x_r - y_r|$ definierte Funktion. Man berechnet

$$\Big\langle \tau(x), (\mathrm{Grad} F)(x) \Big\rangle = \frac{\Big\langle x_r - y_r, \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T\Big) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|x_r - y_r|} \tag{3.66}$$

mit $\mathbf{Grad} r = (\mathrm{Grad} r_1, ..., \mathrm{Grad} r_3)$ und erhält für $x_s,\ x \in V,\ y \in \partial D \setminus \overline{V}$ die Gleichung

$$\Big\{ \, |(x_s)_r - y_r| \quad - \quad |x_r - y_r| \, \Big\} \tag{3.67}$$

$$= |x_s - x| \, \frac{\Big\langle x_r - y_r, \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T\Big) \circ (x_s - x) \Big\rangle}{|x_r - y_r|} \quad + \quad F_1(\tau, r, h, x, y, s)$$

mit

$$|F_1(\tau, r, h, x, y, s)| \quad \leq C \frac{|x_s - x|^2}{|x_s - y|} \quad \forall r \in \mathcal{C}^2_\rho.$$

Analog erhält man für den Kern des Operators $K^{(\mu)}$ im potentialtheoretischen Fall $\kappa = 0$ die Gleichung:

$$\frac{1}{s} \left\{ \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \Big\{ \frac{\Big\langle \nu_r(y), (x_s)_r - y_r \Big\rangle}{|(x_s)_r - y_r|^3} J_T(r, y) \Big\}(h) - \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \Big\{ \frac{\Big\langle \nu_r(y), x_r - y_r \Big\rangle}{|x_r - y_r|^3} J_T(r, y) \Big\}(h) \right\}$$

$$= \quad \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \left[\frac{\Big\langle \nu_r(y) - \nu_r(x), (\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T(x)) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|x_r - y_r|^3} \right. \right.$$

$$\left. \left. -3 \frac{\Big\langle \nu_r(y), x_r - y_r \Big\rangle \Big\langle x_r - y_r, \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T(x)\Big) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|x_r - y_r|^5} \right] J_T(r, y) \right\}(h) \tag{3.68}$$

$$+ \quad F_1(\tau, r, h, x, y, s)$$

mit

$$|F_1(\tau, r, h, x, y, s)| \quad \leq C \frac{|x_s - x|}{|x_s - y|^3} \tag{3.69}$$

für alle $r \in \mathcal{C}^2_\rho$ und $h \in \mathcal{C}^2_1$. Dabei durften wir wegen

$$\nu(r, x) \perp \Big(1\!\!1 + (\mathbf{Grad} r)^T(x) \Big) \circ \tau(x) \tag{3.70}$$

im ersten Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens von (3.68) den Summanden $-\nu(r, x)$ einschieben. Die Beziehung (3.70) kann elementar nachgerechnet werden. Auf analoge Weise überzeugt man sich von der Gültigkeit der Abschätzungen

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathrm{grad}_y \Phi \Big\} (r, h, x_s, y) - \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathrm{grad}_y \Phi \Big\} (r, h, x, y) \right| \quad \leq \quad C_\mu \frac{|s|}{|x - y|^3} \tag{3.71}$$

und

$$\left| \frac{1}{s} \Big(\frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathrm{grad}_y \Phi \Big\} (r, h, x_s, y) - \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathrm{grad}_y \Phi \Big\} (r, h, x, y) \Big) \right. \tag{3.72}$$

$$\left. - \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathbf{Grad}_x \mathrm{grad}_y \Phi \Big\}^T (r, h, x, y) \circ \tau(x) \right| \quad \leq C \frac{|s|}{|x - y|^4}$$

für $|s| \leq \frac{|x-y|}{2}, j \leq \mu \ x, y \in \partial D$ mit $x \neq y \in \partial D, \quad r \in \mathcal{C}^2_\rho$, und $h \in \mathcal{C}^2_1$. □

Das folgende Lemma wird in Satz 3.17 zum Beweis der Aussagen für den Operator K^* benötigt.

Lemma 3.16 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand. Es gilt für $r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ die Beziehung*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial D \setminus \Omega_\epsilon(x)} \frac{\partial^j}{\partial r^j} \Big\{ \mathrm{Grad}_T \Phi(r, x, y) J_T(r, y) \Big\} (h) ds(y) \tag{3.73}$$

$$= (-2) \sum_{\xi=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \xi \end{pmatrix} S^{(j-\xi)} \Big(\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi} \Big\{ \nu H \Big\} (r, h) \Big) (x), \quad x \in \partial D.$$

Beweis: Für $\epsilon > 0$ ist $\int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \mathrm{Grad}_r \Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y)$ als Abbildung $\mathcal{C}^2_\rho \to \mathbb{C}$ F^∞-glatt mit der $j-$ten Ableitung

$$\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{ \int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \mathrm{Grad}_T \Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y)\Big\}(h)$$

$$= \int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\mathrm{Grad}_T \Phi(r,x,y) J_T(r,y)\Big\}(h) ds(y)$$

Durch zweimalige Anwendung von Theorem 2.1 aus [CK1] erhalten wir für x aus ∂D

$$\int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \mathrm{Grad}_T \Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y) \tag{3.74}$$

$$= -\int_{|x_r-y_r|=\epsilon, y\in\partial D} \nu_0(r,y)\Phi(r,x,y) d\Gamma(y)$$
$$-2\int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \nu(r,y) H(r,y)\Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y)$$
$$= -\frac{e^{ik\epsilon}}{2\pi\epsilon}\int_{|x_r-y_r|=\epsilon, y\in\partial D} \nu_0(r,y) d\Gamma(y)$$
$$-2\int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \nu(r,y) H(r,y)\Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y)$$
$$= \int_{\partial D\cap\Omega_\epsilon(x)} 2\nu(r,y) H(r,y) J_T(r,y) ds(y)$$
$$-2\int_{\partial D\setminus\Omega_\epsilon(x)} \nu(r,y) H(r,y)\Phi(r,x,y) J_T(r,y) ds(y).$$

Alle in (3.74) auftretenden Integrale sind $F^\infty-$glatt. Dies sieht man durch eine Anwendung von Korollar 3.6. Die Differentiation erfolgt durch Differentiation der Kerne. Wir bilden die $j-$te Fréchet Ableitung von (3.74) und bilden den Grenzwert $\epsilon \to 0$. Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung geht gegen Null, der zweite – bei Beachtung der Kettenregel – gegen

$$(-2)\sum_{\xi=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \xi \end{pmatrix} S^{(j-\xi)}\Big(\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}\Big\{\nu H\Big\}(r,h)\Big)(x).$$

□

Die Abbildungseigenschaften der Operatoren

Wir untersuchen im folgenden Satz die Abbildungseigenschaften der Operatoren $S^{(\mu)}$, $K^{(\mu)}$ und $K^{*,(\mu)}$ in den Räumen der hölderstetig differenzierbaren Funktionen. In Satz 3.18 wird daraus mit Hilfe des Differentiationssatzes 3.5 und den Differenzierbarkeitsaussagen von Abschnitt 3.4 für die Kerne der Operatoren auf die Fréchet Differenzierbarkeit dieser Operatoren in den angesprochenen Räumen geschlossen.

Satz 3.17 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $\mu \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten für $r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in C^2(\partial D, \mathbb{R}^3)$ die Beziehungen*

$$S^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)) \tag{3.75}$$

und

$$K^{(\mu)}(r,h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)).$$

Sei ∂D sogar $C^{2,\alpha}-$glatt. Dann gilt für $r \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho, h \in C^{2,\alpha}(\partial D, \mathbb{R}^3)$ die Beziehung

$$K^{*,(\mu)}(r,h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)). \tag{3.76}$$

Die Mengen

$$\Big\{\| S^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D),C^{1,\alpha}(\partial D))}, \quad r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in \mathcal{C}^2_1\Big\}$$

$$\Big\{\| K^{(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D),C^{1,\alpha}(\partial D))}, \quad r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in \mathcal{C}^2_1\Big\}$$

und

$$\Big\{\| K^{*,(\mu)}(r,h) \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D),C^{1,\alpha}(\partial D))}, \quad r \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho, h \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_1\Big\}$$

sind beschränkt in $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir führen den Beweis im potentialtheoretischen Fall $\kappa = 0$.

Bemerkung: Die Beweise für die Aussagen über die Operatoren S und K werden in Teil I. und II. dieses Beweises ausgeführt. Beim Operator K^* beschränken wir uns in Teil III. auf die Beschreibung der wesentlichen Beweisschritte ohne Details. Der Beweis verläuft im Prinzip analog zu Teil II. Dieses Vorgehen erscheint insofern sinnvoll, als erstens die Aussagen über K^* im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr benötigt werden, sie aber zweitens wegen der Analogie des

Beweises zu dem von K und im Vergleich mit den Eigenschaften von S und K an diese Stelle einer systematischen Untersuchung gehören.

I. Betrachten wir zunächst $S^{(\mu)}$. Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$. Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit von $S^{(\mu)}\varphi$. Es genügt, die Aussage lokal nachzuweisen. Sei $\mathcal{A}$ ein isometrischer Atlas von ∂D und $(U, V, \Psi) \in \mathcal{A}$. Wir zerlegen

$$\begin{aligned} (S^{(\mu)}(r,h)\varphi)(x) &= \int_{\partial D \setminus V} \mathcal{K}_{S^{(\mu)}}(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y) \\ &\quad + \int_V \mathcal{K}_{S^{(\mu)}}(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y), \qquad x \in V'. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Die Form des Kerns $\mathcal{K}_{S^{(\mu)}}$ wird durch (3.43) in Lemma 3.11 gegeben. Die Existenz und Beschränktheit der Ableitungen des ersten Integrals der Gleichung (3.77) folgen daraus, daß es sich um einen nach $x \in V'$ stetig differenzierbaren Kern handelt, der auf

$$\mathcal{C}^2_\rho \times \mathcal{C}^2_1 \times V' \times (\partial D \setminus V)$$

beschränkte Ableitungen hat. Wir können also den Oberflächengradienten des ersten Integrals berechnen.

Wir transformieren das zweite Integral von (3.77) auf U. Zunächst weisen wir die partielle Differenzierbarkeit nach. Dazu zeigen wir, daß der auf U transformierte Kern (3.43) die Voraussetzungen von Satz 1.6 erfüllt. Zunächst ist die Differenzierbarkeit des Kernes für $x \neq y$ offensichtlich. Als Ableitung erhalten wir Ausdrücke, welche Produkte von Kernen der Form (2.60) und (2.61) mit hölderstetigen Funktionen sind, die nur von x oder y abhängen. An (3.43) und den partiellen Ableitungen dieser Terme können wir nun die Voraussetzungen 2) und 3) von Satz 1.6 nachprüfen. Dies geschieht, indem wir für die partiellen Ableitungen Satz 2.6 benutzen und für (3.43) selbst analog zum Beweis dieses Satzes vorgehen. Das transformierte Integral ist somit partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen können durch Differentiation des Kerns gebildet werden. Als Ergebnis der Differentiation erhalten wir ein Integral, das im Sinne eines Cauchy Hauptwertes existiert. Wir können nun den Oberflächengradienten des Integrals berechnen und das Ergebnis der Rechnungen unter Ausnutzung der Aussagen von Lemma 1.5 wieder auf V transformieren. Wir fassen das

Ergebnis der Rechnungen für die beiden in (3.77) auftretenden Integrale wie folgt zusammen:

Sei $\tau \in NCT^{0,\alpha}(V)$ ein normiertes hölderstetiges Tangentialfeld, $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ eine hölderstetige Dichte und $x \in V$. Als Ableitung

$$\Big\langle \tau(x), \mathrm{Grad}(S^{(\mu)}\varphi)(x) \Big\rangle$$

der Funktion $S^{(\mu)}\varphi$ erhalten wir analog zu (3.66) die Funktion

$$\begin{aligned}
&(S_0^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h)\varphi)(x) \\
&:= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \frac{\Big\langle x_r - y_r, \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T(x)\Big) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|x_r - y_r|^3} J_T(r, y) \right\} (h)\varphi(y) ds(y).
\end{aligned}$$

Die Abbildungseigenschaften von $S_0^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h)$ erhalten wir aus Satz 2.6. Es gilt danach für alle $r \in \mathcal{C}^2_\rho, h \in C^2(\partial D)$ und $\tau \in NCT^{0,\alpha}(\partial D)$ die Beziehung

$$S_0^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h) \in BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D)) \tag{3.78}$$

und die Menge

$$\Big\{ \| \, S_0^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h) \, \|_{BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{0,\alpha}(\partial D))}, r \in \mathcal{C}^2_\rho, \; h \in \mathcal{C}^2_1, \; \tau \in NCT^{0,\alpha}(\partial D) \Big\}$$

ist beschränkt in $\mathbb{R}$. Es folgen die Aussagen des Satzes für $S^{(\mu)}$.

II. Betrachten wir nun $K^{(\mu)}$. Sei $V \subset \partial D$ eine offene Menge und $\tau \in NCT^{0,\alpha}(V)$ ein hölderstetiges Tangentialfeld. Wir zeigen, daß die durch

$$\begin{aligned}
&(K_0^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h)\varphi)(x) := \\
&\int_{\partial D} [\varphi(y) - \varphi(x)] \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu} \left\{ \left[\frac{\Big\langle \nu(r, y) - \nu(r, x), \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T(x)\Big) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|(x_r - y_r)|^3} \right.\right. \\
&\left.\left. -3 \frac{\Big\langle \nu(r, y), x_r - y_r \Big\rangle \Big\langle x_r - y_r, \Big(\mathbb{1} + (\mathbf{Grad} r)^T(x)\Big) \circ \tau(x) \Big\rangle}{|(x_r - y_r)|^5} \right] J_T(r, y) \right\} (h) ds(y)
\end{aligned}$$

definierte Funktion die Ableitung

$$\Big\langle \tau(x), \mathrm{Grad}\Big(K^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x)\Big\rangle$$

auf V darstellt. Betrachte für festes $x \in \partial D$ den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{s}\Big\{(K^{(\mu)}(r,h)\varphi)(x_s) - (K^{(\mu)}(r,h)\varphi)(x)\Big\} - K^{\nabla,(\mu)}(\tau, r, h, x).$$

Dabei benutzen wir die zu Beginn des Abschnitts eingeführten Bezeichnungen. Mit Hilfe des Green'schen Satzes erhalten wir für alle $r \in \mathcal{C}^2_\rho$

$$\int_{\partial D} \frac{\Big\langle \nu(r,y), x_r - y_r\Big\rangle}{|x_r - y_r|^3} J_T(r,y)ds(y) = -\frac{1}{2}, \;\; x \in \partial D \tag{3.79}$$

(vgl. Theorem 2.13 und Gleichung (2.40) von [CK1]). Mit Satz 3.14 folgt nun für $\mu \geq 1$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\left\{\frac{\Big\langle \nu(r,y), x_r - y_r\Big\rangle}{|(x_r - y_r)|^3} J(r,y)\right\}(h)ds(y) \tag{3.80}$$

$$= \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\left\{\int_{\partial D} \frac{\Big\langle \nu(r,y), x_r - y_r\Big\rangle}{|(x_r - y_r)|^3} J_T(r,y)(h)ds(y)\right\} \;=\; \frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\left\{-\frac{1}{2}\right\} \;=\; 0,$$

also

$$\Big(K^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x_s) = \tag{3.81}$$

$$\int_{\partial D} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big]\frac{\partial^\mu}{\partial r^\mu}\left\{\frac{\Big\langle \nu(r,y), (x_s)_r - y_r\Big\rangle}{|(x_s)_r - y_r|^3} J_T(r,y)\right\}(h)ds(y).$$

Für $\mu = 0$ gilt

$$\Big(K(r,h)\varphi\Big)(x_s) = \\ \int_{\partial D} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] \frac{\Big\langle \nu(r,y), (x_s)_r - y_r \Big\rangle}{\left|(x_s)_r - y_r\right|^3} J_T(r,y) ds(y) \quad - \quad \frac{1}{2}\varphi(x). \tag{3.82}$$

Wir erhalten aus dem Vorausgehenden und Gleichung (3.68)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\Big\{\int_{\partial D} \mathcal{K}_{K^{(\mu)}}(r,h,x_s,y)\varphi(y)ds(y) \quad - \quad \int_{\partial D} \mathcal{K}_{K^{(\mu)}}(r,h,x,y)\varphi(y)ds(y)\Big\} \\ &\qquad - \int_{\partial D} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] \mathcal{K}_{K^{\nabla,(\mu)}}(\tau,r,h,x,y)ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] \Big\{\frac{1}{s}\Big(\mathcal{K}_{K^{(\mu)}}(r,h,x_s,y) \;-\; \mathcal{K}_{K^{(\mu)}}(r,h,x,y)\Big) \\ &\qquad - \mathcal{K}_{K^{\nabla,(\mu)}}(\tau,r,h,x,y)\Big\} ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] F_1(\tau,r,h,x,y,s) ds(y). \end{aligned}$$

Sei (U, V, Ψ) eine lokale Karte aus $\mathcal{A}$ und $x = \Psi(u) \in V$. Bezeichne $\tilde{F}_1$ die auf U transformierte Funktion F_1. Dann folgt aus (3.69) und (3.63) die Abschätzung

$$\left| \int_{\Omega_R(u)\setminus\Omega_{\varrho(u)}} \Big[\tilde{\varphi}(u) - \tilde{\varphi}(v)\Big] \tilde{F}_1(\tau,r,h,u,v,s) \tilde{J}_T(v) dv \right| \;\le\; C \;|s|\; \Big(\varrho^{\alpha-1} + 1\Big) \tag{3.83}$$

sowie aus (3.68) die Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega_{\varrho(u)}} \Big[\tilde{\varphi}(u) - \tilde{\varphi}(v)\Big] \tilde{F}_1(\tau,r,h,u,v,s) \tilde{J}_T(v) dv \right| \;\le\; C \left(\frac{\varrho^{1+\alpha}}{|s|} + \varrho^{\alpha}\right) \tag{3.84}$$

jeweils für $|s| \;\le\; \varrho/4$.

Wir nutzen noch die Abschätzung (3.69) für das Integral

$$\int_{\partial D\setminus\Psi(\Omega_R(u))} \Big[\varphi(x)-\varphi(y)\Big] ds(y) F_1(\tau,r,h,x,y,s),$$

und setzen dann $\varrho = 4\cdot|s|$ in allen Ungleichungen. Es folgt

$$\left|\int_{\partial D} \Big[\varphi(x)-\varphi(y)\Big] F_1(\tau,r,h,x,y,s)ds(y)\right| \;=\; O\Big(|s|^{\alpha}\Big) \qquad (3.85)$$

und damit die Existenz der Richtungsableitungen an der Stelle x. Wie zu Beginn des Abschnitts ausgeführt folgen die Existenz des Oberflächengradienten und die Gleichung

$$\Big\langle \tau(x), \mathrm{Grad}\Big(K^{(\mu)}\varphi\Big)(x)\Big\rangle \;=\; \Big(K^{\nabla,(\mu)}(\tau,r,h)\varphi\Big)(x) \qquad (3.86)$$

daraus mit Hilfe der nun zu zeigenden Abbildungseigenschaften des Operators $K^{\nabla,(\mu)}$.

Wir überzeugen uns von der Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 2.5 für den Kern von $K^{\nabla,(\mu)}(r,h)$ mit einer Konstanten $\mathbf{C}_2$, welche von $r\in\mathcal{C}^2_\rho$ und $h\in\mathcal{C}^2_1$ unabhängig gewählt werden kann. Die Bedingung (2.46) erhalten wir durch eine elementare induktive Rechnung unter Zuhilfenahme der Lemmas 3.8 und 3.9. Die Abschätzung (2.47) folgt durch Abschätzung des Oberflächengradienten des Kerns wie im Beweisteil II. von Lemma 3.11. Die Beschränktheit des Termes (2.48) überlegt man sich etwa mit Hilfe der Gleichung (3.68) und einer zu Gleichung (3.80) analogen Anwendung des Green'schen Satzes. Es folgen die Aussagen des Satzes 2.5 für $K^{\nabla,(\mu)}$ und insgesamt die Aussagen des zu beweisenden Satzes über $K^{(\mu)}$.

III. Betrachten wir den Operator $K^{*,(\mu)}$. Wegen Teil II. des Beweises reicht es aus, den Operator $A^{(\mu)}(r,h) := K^{(\mu)}(r,h) + K^{*,(\mu)}(r,h)$ zu behandeln. Sei φ aus $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Wir wollen analog zu Teil II. den Oberflächengradienten von $A^{(\mu)}(r,h)\varphi$ bestimmen, indem wir zeigen, daß die durch

$$\Big(A^{\nabla,(\mu)}(\tau,r,h)\varphi\Big)(x) := \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \tau(x)^T \circ \mathbf{Grad}\left(\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h)\right)(x) \circ$$

$$\int_{\partial D} \Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big] \frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\mathrm{grad}_y \Phi(r,x,y) J_T(r,y)\Big\}(r,h)ds(y)$$

$$- \varphi(x)\ \tau(x)^T \circ \sum_{j=0}^{\mu}\sum_{\xi=0}^{j} \binom{\mu}{j}\binom{j}{\xi}\ \mathbf{Grad}\left(\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h)\right)(x) \circ$$

$$\Bigg[\left(K^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi \nu}{\partial r^\xi}(r,h)\right)(x) - 2\ \left(S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi(\nu H)}{\partial r^\xi}(r,h)\right)(x)\Bigg]$$

$$+\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}\int_{\partial D}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]\frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}}\Big\{\nu(y)-\nu(x)\Big\}^T(r,h)\circ$$

$$\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{(\mathbf{grad}_x \mathrm{grad}_y \Phi)^T(r,x,y)J_T(r,y)\Big\}(h)\ \tau\ ds(y)$$

$$-\varphi(x)\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{\xi=0}^{j}\binom{\mu}{j}\binom{j}{\xi}\Bigg[\Bigg[\left(K^{\nabla,(j-\xi)}(\tau,r,h)\frac{\partial^\xi\nu}{\partial r^\xi}(r,h)\right)(x)$$

$$-2\ \left(S^{\nabla,(j-\xi)}(\tau,r,h)\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}\Big\{\nu(r)H(r)\Big\}\right)(x)\Bigg]^T\circ\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x)\Bigg]$$

definierte Funktion die Ableitung

$$\Big\langle \tau(x), \Big(\mathrm{Grad} A^{(\mu)}(r,h)\Big)(x)\Big\rangle$$

darstellt. Mit Hilfe von Lemma 3.16 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big(A^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x) := \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \int_{\partial D} \Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big] \frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}} \Big\{\nu(r,y)-\nu(r,x)\Big\}^T(h)\circ \\
\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\mathrm{grad}_y \Phi(r,x,y) J_T(r,y)\Big\}(h) ds(y) \\
+\ \varphi(x)\Bigg[\Big(K^{(\mu)}(r,h)1\Big)(x) - \sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j} \frac{\partial^{\mu-j}\nu^T}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x)\circ \\
\sum_{\xi=0}^{j}\binom{j}{\xi}\Bigg[\left(K^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi \nu}{\partial r^\xi}(r,h)\right)(x) \\
-\ 2\left(S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}(\nu H)(r,h)\right)(x)\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Big(A^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x_s) := \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \int_{\partial D} \Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big] \frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}} \Big\{\nu(r,y)-\nu(r,x_s)\Big\}^T(h)\circ \\
\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\mathrm{grad}_y \Phi(r,x,y) J_T(r,y)\Big\}(h)\ ds(y) \\
+\ \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \int_{\partial D} \Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big] \frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}} \Big\{\nu(r,y)-\nu(r,x)\Big\}^T\circ \\
\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\Big[\mathrm{grad}_y \Phi(r,x_s,y) - \mathrm{grad}_y \Phi(r,x,y)\Big] J_T(r,y)\Big\}(h)\ ds(y) \\
+\ \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}} \Big\{\nu(r,x_s)-\nu(r,x)\Big\}^T(h)\circ
\end{aligned}$$

$$\int_{\partial D}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\Big[\operatorname{grad}_y\Phi(r,x_s,y)-\operatorname{grad}_y\Phi(r,x,y)\Big]J_T(r,y)\Big\}\,(h)ds(y)$$

$$+\,\varphi(x)\,\Bigg[\Big(K^{(\mu)}(r,h)1\Big)(x_s)-\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}\frac{\partial^{\mu-j}\nu^T}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x_s)\circ$$

$$\sum_{\xi=0}^{j}\binom{j}{\xi}\Big[\Big(K^{(j-\xi)}(r,h)\,\frac{\partial^{\xi}\nu}{\partial r^{\xi}}(r,h)\Big)(x_s)$$

$$-2\,\left(S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^{\xi}}{\partial r^{\xi}}\Big\{\nu H\Big\}(r,h)\right)(x_s)\Big]\Big\rangle\Bigg].$$

Man überzeuge sich von der Gleichung

$$\frac{1}{s}\Big\{\Big(A^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x_s)-\Big(A^{(\mu)}(r,h)\varphi\Big)(x)\Big\}-\Big(A^{\nabla,(\mu)}(\tau,r,h)\varphi\Big)(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}F_i(\varphi,\mu,\tau,r,h,x,s)$$

mit

$$F_1(\varphi,\mu,\tau,r,h,x,s):=\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}\Bigg[\Big(-\frac{1}{s}\Big)\frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}}\Big\{\nu(r,x_s)-\nu(r,x)\Big\}^T(h)$$

$$+\ \tau(x)^T\circ\mathbf{Grad}\Big(\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h)\Big)(x)\Bigg]$$

$$\circ\int_{\partial D}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{(\operatorname{grad}_y\Phi)(r,x,y)J_T(r,y)\Big\}(h)ds(y)$$

$$F_2(\varphi,\mu,\tau,r,h,x,s) := \sum_{j=0}^{\mu}\sum_{\xi=0}^{j}\binom{\mu}{j}\binom{j}{\xi}\varphi(x)\Big(-\frac{1}{s}\Big)$$

$$\bigg\{\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x_s)^T\circ\Big[\Big(K^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi\nu}{\partial r^\xi}(r,h)\Big)(x_s)$$

$$-\,2\,\Big(S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}\Big\{\nu H\Big\}(r,h)\Big)(x_s)\Big]$$

$$-\;\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x)^T\circ\Big[\Big(K^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi\nu}{\partial r^\xi}(r,h)\Big)(x)$$

$$-\,2\,\Big(\,S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}\Big\{\nu H\Big\}(r,h)\,\Big)(x)\Big]\bigg\}$$

$$+\,\tau^T(x)\circ\mathbf{Grad}\bigg(\frac{\partial^{\mu-j}\nu}{\partial r^{\mu-j}}(r,h,x)\circ\Big[\Big(\,K^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi\nu}{\partial r^\xi}(r,h)\,\Big)(x)$$

$$-\,2\,\Big(\,S^{(j-\xi)}(r,h)\frac{\partial^\xi}{\partial r^\xi}\Big\{\nu H\Big\}(r,h)\,\Big)(x)\Big]\bigg),$$

$$F_3(\varphi,\mu,\tau,r,h,x,s)\;:=$$

$$\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}\int_{\partial D}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]\frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}}\{\nu(r,y)-\nu(r,x)\}^T(h)\circ$$

$$\bigg[\frac{1}{s}\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\Big[\mathrm{grad}_y\Phi(r,x_s,y)\;-\;\mathrm{grad}_y\Phi(r,x,y)\Big]J_T(r,y)\}(h)$$

$$-\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\mathbf{grad}_x\mathrm{grad}_y\Phi(r,x,y)J_T(r,y)\Big\}(h)\circ\tau(x)\bigg]\;ds(y),$$

$$F_4(\varphi,\mu,\tau,r,h,x,s) \;:=$$

$$\sum_{j=0}^{\mu} \begin{pmatrix} \mu \\ j \end{pmatrix} \Big(\frac{1}{s}\Big) \frac{\partial^{\mu-j}}{\partial r^{\mu-j}} \Big\{\nu(r,x_s)-\nu(r,x)\Big\}^T(h) \;\circ\; \int_{\partial D} \Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]$$

$$\frac{\partial^j}{\partial r^j}\Big\{\Big[\mathrm{grad}_y\Phi(r,x_s,y)-\mathrm{grad}_y\Phi(r,x,y)\Big]J_T(r,y)\Big\}(h)\; ds(y).$$

Die Konvergenz von F_1 und F_2 gegen Null für $s \to 0$ ist unmittelbar einsehbar. Für den dritten und vierten Term nutzen wir (3.71) und (3.72) und gehen jeweils analog zur Behandlung von $K^{(\mu)}$ vor. Die Beweise für den Fall $\mu = 0$ sind etwa in [Ki2], S.794 ausgeführt.

Es bleiben die Abbildungseigenschaften von $A^{\nabla,(\mu)}$ zu untersuchen. Wir wollen den Beweis für den Fall $\kappa = 0$ andeuten. $A^{\nabla,(\mu)}$ besteht aus vier Termen:

$$A^{\nabla,(\mu)}(\tau,r,h)\varphi = -w_1 - w_2 + w_3 - w_4.$$

Wir wenden auf w_1 Satz 2.5 an und erhalten $\| w_1 \|_{C^{0,\alpha}(V)} \;\leq\; C \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$ für $r \in \mathcal{C}^{n,\alpha}_\rho$ und $h \in \mathcal{C}^2_1$ mit einer von r und h unabhängigen Konstanten C. Die entsprechende Aussage für w_2 und w_4 folgt aus den Abbildungseigenschaften von $K^{(\xi)}$ und $S^{(\xi)}$ und der Glattheit von ν und H. Auch auf w_3 kann man Satz 2.5 anwenden. Zum Nachweis der Voraussetzungen nutze man

$$\mathbf{grad}_x \mathrm{grad}_y \Phi(x,y) = \frac{1}{|(x_r-y_r)|^3}\mathbb{1} \;+\; \frac{1}{|(x_r-y_r)|^5}(x_r-y_r)\circ(x_r-y_r)^T.$$

Die langen Rechnungen sind mit den bisher benutzten Mitteln durchführbar, sollen hier jedoch aus Platzgründen nicht ausgeführt werden.

□

Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Operatoren

Der Inhalt des folgenden Satzes ist die Fréchet Differenzierbarkeit der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Potentialoperatoren S, K und K^* in den Räumen der *hölderstetig differenzierbaren* Funktionen.

Satz 3.18 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand, $\rho > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0,1)$. Die Abbildungen*

$$S: \;\; \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)), \;\; r \mapsto S(r) \tag{3.87}$$

und

$$K: \;\; \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)), \;\; r \mapsto K(r) \tag{3.88}$$

sind $F^\infty-$glatt. Sei der Rand ∂D sogar $C^{2,\alpha}-$glatt. Dann ist die Abbildung

$$K^*: \;\; \mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho \to BL(C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)), \;\; r \mapsto K^*(r) \tag{3.89}$$

$F^\infty-$glatt. Die $\mu-$te Fréchet Ableitung , $\mu \in I\!N$, des Operators S, K bzw. K^* wird durch den Operator $S^{(\mu)}, K^{(\mu)}$ bzw. $K^{*,(\mu)}$ gegeben.

Beweis: Die Aussagen erhalten wir aus Satz 3.5. Die Voraussetzungen dieses Satzes werden durch Lemma 3.11, Satz 3.12 und Satz 3.17 gegeben. □

Kapitel 4

Fréchet Differenzierbarkeit von Randwertproblemen

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Lösung von Streuproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen. Es werden dazu im ersten Abschnitt kurz einige Ergebnisse der Theorie akustischer und elektromagnetischer Wellen aufgeführt. Danach wird in Abschnitt 4.2 das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis, in Abschnitt 4.3 das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis und in Abschnitt 4.4 das elektromagnetische Streuproblem behandelt.

Wir strukturieren die Abschnitte 4.2 bis 4.4 stets nach dem Muster *Definition des Streuproblems – Definition des zugehörigen Randwertproblems – Eindeutigkeitssatz – Lösung des Randwertproblems mit IGL-Methoden – Lösung des Streuproblems – Fréchet Differenzierbarkeit des Streuproblems in Abhängigkeit vom Rand – Regularitätssatz über die Lösung des Streuproblems bis zum Rand*.

Bei der *Definition der Streuprobleme* und ihrer *Lösung* folgen wir [CK2]. Da sich dort eine ausführliche Darstellung der Methoden findet, fassen wir hier nur die für uns wichtigen Bestandteile zusammen. Die benutzten Potentiale und Integraloperatoren wurden in Abschnitt 3.1 eingeführt.
Die *Fréchet Differenzierbarkeit* der Streuabbildung erhält man dann mit Hilfe funktionalanalytischer Schlüsse aus den Sätzen des dritten Kapitels. Die wesentliche analytische Arbeit wurde dort und im zweiten Kapitel geleistet.
Regularitätssätze werden im fünften Kapitel benötigt, wo es um die Charakterisierung der Fréchet Ableitungen geht. Bei den Charakterisierungen wird die

Existenz des Gradienten oder der zweiten Ortsableitungen des gestreuten Feldes auf dem Rand des Gebietes D benötigt. Der *Regularitätssatz* entfällt beim Dirichletproblem, da wir hier auf [CK1] zurückgreifen können.

4.1 Akustische und elektromagnetische Wellen

Die Beschreibung zeitharmonischer akustischer Wellen in einem isotropen Medium erfolgt mit Hilfe einer skalaren Funktion $u : I\!R^3 \to \mathbb{C}$, welche der *reduzierten Wellengleichung* oder *Helmholtzgleichung*

$$\triangle u + \kappa^2 u = 0 \tag{4.1}$$

genügt, wobei wir $\kappa \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\kappa \geq 0$ voraussetzen. Zur Behandlung von Streuproblemen nutzt man die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung*

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) u = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \to \infty \tag{4.2}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\frac{x}{|x|}$ zur Charakterisierung auslaufender Wellen. Von zentraler Bedeutung ist die schon in (3.12) eingeführte Funktion

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y, x, y \in I\!R^3.$$

Sie heißt *Grundlösung* zur Helmholtzgleichung, löst die Helmholtzgleichung in $I\!R^3 \setminus \{y\}$ und erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Eine Lösung der Helmholtzgleichung, welche der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt, nennen wir *ausstrahlend.*

Betrachten wir die Ausbreitung zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen in einem isotropen Medium. Elektrisches und magnetisches Feld werden durch vektorwertige Funktionen $E : I\!R^3 \to \mathbb{C}^3$ und $H : I\!R^3 \to \mathbb{C}^3$ beschrieben, welche den *reduzierten Maxwell Gleichungen*

$$\mathrm{curl}E - i\kappa H = 0, \qquad \mathrm{curl}H + i\kappa E = 0 \tag{4.3}$$

genügen, wobei $\kappa \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\kappa \geq 0$ vorausgesetzt wird. Das Gegenstück zur Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung der akustischen Wellenausbreitung bildet die *Silver Müller Ausstrahlungsbedingung*

$$\lim_{r\to\infty} (H \times x - rE) \;=\; 0, \qquad r = \; |x| \tag{4.4}$$

bzw.

$$\lim_{r\to\infty}(E \times x + rH) \;=\; 0, \qquad r = |x|$$

mit auf S gleichmäßigem Grenzwert. Eine Lösung der Maxwell Gleichungen mit (4.4) heißt *ausstrahlend*.

Lösungen der reduzierten Maxwell Gleichungen erfüllen komponentenweise die Helmholtzgleichung. Sei umgekehrt E ein divergenzfreies Vektorfeld, welches komponentenweise die Helmholtzgleichung erfüllt. Dann ist $E, H := \mathrm{curl} E/i\kappa$ Lösung der Maxwellgleichungen.

4.2 Das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis

Thema des vorliegenden Abschnitts ist das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis. Definition 4.1 bis Satz 4.5 folgen unmittelbar [CK2] in der Darstellung und Lösung des Streuproblems. Wir sind danach unter Ausnutzung der Ergebnisse der ersten drei Kapitel in Satz 4.6 in der Lage, die Fréchet Differenzierbarkeit des Streuproblems in Abhängigkeit vom Rand nachzuweisen.

Definition 4.1 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $I\!R^3 \setminus D$ zusammenhängend. Wir bezeichnen als* **akustisches Streuproblem** *am* **schallweichen** *Hindernis die folgende Fragestellung: Sei u^i Lösung der Helmholtzgleichung in $I\!R^3$. Gesucht ist ein gestreutes Feld $u^s \in C^2(I\!R^3 \setminus \overline{D}) \cap C(I\!R^3 \setminus D)$, welches der Helmholtzgleichung* (4.1) *genügt und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* (4.2) *erfüllt, so daß das* Gesamtfeld *$u := u^i + u^s$ auf dem Rand ∂D des Gebietes D verschwindet.*

Nach Umbenennung der unbekannten Felder führt das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis unmittelbar auf das

Definition 4.2 Äußere Dirichletproblem: *Sei f eine auf ∂D stetige Funktion. Gesucht ist eine ausstrahlende Lösung $u \in C^2(I\!R^3 \setminus \overline{D}) \cap C(I\!R^3 \setminus D)$ der Helmholtzgleichung $\triangle u + \kappa^2 u = 0$ in $I\!R^3 \setminus \overline{D}$, welche die Randbedingung $u = f$ auf ∂D erfüllt.*

Satz 4.3 *Das äußere Dirichletproblem hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Siehe [CK2], Theorem 3.7. □

Wir kommen nun zur Lösung des äußeren Dirichletproblems. Die Definition der Potentiale und Potentialoperatoren findet man in Abschnitt 3.1.

Satz 4.4 (Lösung des äußeren Dirichletproblems.) *Das äußere Dirichletproblem hat eine eindeutige Lösung. Sie wird gegeben durch die Funktion*

$$u = 2S_3(I + K - i\eta S)^{-1} f, \tag{4.5}$$

wobei die Inverse des Operators $(I + K - i\eta S) : C(\partial D) \to C(\partial D)$ *stetig ist.*

Beweis: Siehe [CK2], Satz 3.9 und dessen Beweis: Es wird unter Ausnutzung der Sprungrelationen für das Einfach- und Doppelschichtpotential gezeigt, daß das Potential $S_3\varphi$ – vgl. Abschnitt 3.1 – das äußere Dirichletproblem löst, falls die Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ eine Lösung der Integralgleichung

$$(I + K - i\eta S)\varphi = 2f$$

ist. Die Invertierbarkeit des Operators und die Stetigkeit der Inversen führt man mit Hilfe des Satzes von Riesz und der Kompaktheitseigenschaften von S und K in $C(\partial D)$ – vgl. die Sätze 3.12 und 1.1 – auf seine Injektivität in $C(\partial D)$ zurück. Die Injektivität von $(I+K-i\eta S)$ wird in [CK2] unter Ausnutzung der Eindeutigkeit des äußeren Dirichletproblems und des Greenschen Satzes nachgewiesen. □

Aus Satz 4.4 erhält man die Lösbarkeit des Streuproblems:

Satz 4.5 (Lösung des akustischen Streuproblems am schallweichen Hindernis.) *Das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis* D *hat eine eindeutige Lösung. Das gestreute Feld* u^s *wird gegeben durch*

$$u^s = -2S_3(I + K - i\eta S)^{-1} R_1 u^i, \tag{4.6}$$

wobei R_1 *der in Abschnitt 3.1 definierte Spuroperator ist.* □

Es folgt jetzt der erste wichtige Differentiationssatz für ein Randwertproblem. Die analogen Sätze für die beiden anderen Streuprobleme sind die Sätze 4.12 und 4.20 des dritten und vierten Abschnitts.

Satz 4.6 (Fréchet Differenzierbarkeit des akustischen Streuproblems am schallweichen Hindernis.) *Sei $G \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\overline{G} \subset I\!R^3 \setminus \partial D$, $\xi \in I\!N_0$ und $\rho > 0$ hinreichend klein. Die Abbildung*

$$u^s : \mathcal{C}^2_\rho \to C^\xi(G), r \mapsto u^s(r),$$

welche durch Gleichung (4.6) *definiert wird und den Rand des Gebietes ∂D_r auf die Lösung des akustischen Streuproblems am schallweichen Hindernis D_r bei festem einfallenden Feld u^i wirft, ist $F^\infty-$glatt. Man erhält die erste Ableitung durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^s}{\partial r} \quad = \quad & -2\,\frac{\partial S_3}{\partial r}(I+K-i\eta S)^{-1}R_1 u^i \\ & +2\,S_3(I+K-i\eta S)^{-1}\frac{\partial(K-i\eta S)}{\partial r}(I+K-i\eta S)^{-1}R_1 u^i \\ & -2\,S_3(I+K-i\eta S)^{-1}\frac{\partial R_1}{\partial r}u^i. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Beweis: Wir überzeugen uns von der Fréchet Differenzierbarkeit aller in Gleichung (4.6) auftretenden Operatoren. Der Operator R_1 ist als Abbildung

$$R_1 : \ \ \mathcal{C}^2_\rho \to C(\partial D), \ \ r \mapsto R_1(r)u^i$$

$F^\infty-$glatt. Das erhält man wegen $u^i \in C^\infty(B)$ – Lösungen der Helmholtzgleichung sind analytisch – unmittelbar aus seiner Definition. Die $F^\infty-$Glattheit des Operators $(I+K-i\eta S) : \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C(\partial D), C(\partial D))$ folgt aus Satz 3.14, Teil II. Wegen Satz 3.2 ist dann auch $(I+K-i\eta S)^{-1} : \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C(\partial D), C(\partial D))$ $F^\infty-$glatt mit der Ableitung

$$-\,(I+K-i\eta S)^{-1}\frac{\partial(K-i\eta S)}{\partial r}(I+K-i\eta S)^{-1}.$$

Schließlich ist die Abbildung $S_3 : \mathcal{C}^2_\rho \to BL(C(\partial D), C^\xi(G))$ nach Definition von S_3 durch S_1 und S_2 und Satz 3.14, Teil I., $F^\infty-$glatt. Daraus erhält man nun die $F^\infty-$Glattheit der Abbildung u^s. Die Form der ersten Ableitung ergibt sich durch Anwendung der Kettenregel. □

4.3 Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis

Wir studieren nun die Streuung an *schallharten* Körpern. Analog zu Abschnitt 4.2 folgen wir in Definition 4.7 bis Satz 4.11 unmittelbar [CK2] in der Darstellung und Lösung des Streuproblems. Die Fréchet Differenzierbarkeit des Streuproblems kann in Satz 4.12 mit einfachen funktionalanalytischen Schlüssen nachgewiesen werden, da die notwendige umfangreiche analytische Arbeit im dritten (und zweiten) Kapitel erledigt wurde. Bei der in Kapitel 5 ausgeführten Charakterisierung der Fréchet Ableitung des Streuproblems benötigen wir die zweiten Ortsableitungen des gestreuten Feldes auf dem Rand des Gebietes D. Ihre Existenz wird in Satz 4.13 nachgewiesen.

Definition 4.7 *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $\mathbb{R}^3 \setminus D$ zusammenhängend. Wir bezeichnen als* **akustisches Streuproblem** *am* **schallharten Hindernis** *die folgende Fragestellung: Sei u^i Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^3$. Gesucht ist ein gestreutes Feld $u^s \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, welches der Helmholtzgleichung* (4.1) *in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ genügt und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* (4.2) *erfüllt, so daß das* Gesamtfeld $u := u^i + u^s$ *auf dem Rand ∂D des Gebietes D die Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

erfüllt, wobei

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \langle \nu(x), \mathrm{grad} u(x + \epsilon \nu(x)) \rangle \tag{4.8}$$

gleichmäßig auf ∂D gilt.

Nach Umbenennung der unbekannten Felder führt das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis unmittelbar auf das

Definition 4.8 Äußere Neumannproblem: *Sei $f \in C(\partial D)$ eine stetige Funktion. Gesucht ist eine ausstrahlende Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ der Helmholtzgleichung $\triangle u + \kappa^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, welche die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f$ auf ∂D erfüllt. $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ soll wie in* (4.8) *auf ∂D ein gleichmäßiger Grenzwert sein.*

Satz 4.9 *Das äußere Neumannproblem hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Der Beweis folgt aus [CK2], Theorem 2.12. □

Satz 4.10 (Lösung des äußeren Neumannproblems.) *Das äußere Neumannproblem hat eine eindeutige Lösung. Sie wird gegeben durch die Funktion*

$$u = -2S_4(I - K^* - i\eta T S_0^2)^{-1} f, \tag{4.9}$$

wobei die Inverse des Operators $(I - K^* - i\eta T S_0^2) : C(\partial D) \to C(\partial D)$ *stetig ist.*

Beweis: Siehe [CK2], Satz 3.10 und dessen Beweis: das Vorgehen erfolgt analog zum Beweis von Satz 4.4. □

Aus Satz 4.10 erhält man die Lösbarkeit des Streuproblems:

Satz 4.11 (Lösung des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis.) *Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis hat eine eindeutige Lösung. Das gestreute Feld* u^s *wird gegeben durch*

$$u^s = 2S_4(I - K^* - i\eta T S_0^2)^{-1} R_2 u^i, \tag{4.10}$$

wobei R_2 *der in Abschnitt 3.1 definierte Spuroperator ist.*

Wir kommen nun im Satz 4.12 zum zweiten Differentiationssatz für ein Randwertproblem, diesmal mit Neumann Randbedingungen. Wir formulieren den Satz analog zum Differentiationssatz 4.6 zur Streuung am schallweichen Hindernis.

Satz 4.12 (Fréchet Differenzierbarkeit des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis.) *Sei* $G \subset \mathbb{R}^3$ *ein beschränktes Gebiet, so daß* $\overline{G} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ *gilt,* $\xi \in \mathbb{N}_0$ *und* $\rho > 0$ *hinreichend klein. Die Abbildung*

$$u^s : \mathcal{C}^2_\rho \to C^\xi(G), r \mapsto u^s(r),$$

welche durch Gleichung (4.10) *definiert wird und den Rand des Gebietes* ∂D_r *auf die Lösung des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis* D_r *bei* *festem einfallendem Feld u^i wirft, ist $F^\infty-$glatt. Man erhält die erste Ableitung durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^s}{\partial r} &= 2\,\frac{\partial S_4}{\partial r}(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i\\ &\quad +2\,S_4(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}(\frac{\partial K^*}{\partial r}+i\eta\frac{\partial TS_0^2}{\partial r})(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i\\ &\quad +2S_4(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}\frac{\partial R_2}{\partial r}u^i. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Beweis: Wir überzeugen uns von der Fréchet Differenzierbarkeit aller in Gleichung (4.10) auftretenden Operatoren. Der Operator R_2 ist als Abbildung

$$R_2:\ \mathcal{C}_\rho^2\to C(\partial D),\ \ r\mapsto R_2(r)u^i$$

$F^\infty-$glatt. Das erhält man mit Lemma 3.8 und $u^i\in C^\infty(B)$ aus der Definition von R_2. Der Operator S_0^2 ist nach Satz 3.14 und 3.18 $F^\infty-$glatt als Abbildung $S_0^2:\ \mathcal{C}_\rho^2\to BL(C(\partial D),C^{1,\alpha}(\partial D)$, der Operator T ist nach Korollar 3.15 als Abbildung

$$T:\ \mathcal{C}_\rho^2\to BL(C^{1,\alpha}(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D))$$

$F^\infty-$glatt. Es folgt die $F^\infty-$Glattheit des Operators

$$TS_0^2:\mathcal{C}_\rho^2\to BL(C(\partial D),C^{0,\alpha}(\partial D)).$$

Wir nutzen noch die Glattheitsaussage von Satz 3.14 für den Operator K^* und Satz 3.2, um die $F^\infty-$Glattheit des Operators

$$(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}:\ \mathcal{C}_\rho^2\to BL(C(\partial D),C(\partial D))$$

zu erhalten. Als Ableitung erhält man

$$(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}\,\frac{\partial(K^*+i\eta TS_0^2)}{\partial r}\,(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}.$$

Schließlich ist die Abbildung $S_4:\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha}\to BL(C(\partial D),C^\xi(G))$ nach Definition von S_4 durch S_1, S_2 und S_0^2 nach Satz 3.14 – Teil I. und II.– $F^\infty-$glatt. Daraus folgt die $F^\infty-$Glattheit der Abbildung u^s im angegebenen Sinne. Die Form der ersten Ableitung ergibt sich durch Anwendung der Kettenregel. □

Zur Charakterisierung der Fréchet Ableitung des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis, wie sie in Kapitel 5 vorgenommen wird, benötigen wir die im folgenden Satz festgehaltene Glattheit der Lösung bis zum Rand.

Satz 4.13 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}-$glattem Rand. Dann gilt für die Lösung u^s des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis $u^s \in C^{2,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$.*

Beweis: Wir betrachten die durch (4.10) gegebene Abbildung. Es ist $R_2 u^i$ in $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

I. Der Operator $(I - K^* - i\eta T S_0^2)^{-1}$ bildet $C^{1,\alpha}(\partial D)$ beschränkt nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$ ab, denn wir haben die folgenden Abbildungseigenschaften: Es sind

$$\begin{aligned}
K^* : &\quad C^{0,\alpha}(\partial D) \to C^{1,\alpha}(\partial D), \\
S_0 : &\quad C^{0,\alpha}(\partial D) \to C^{1,\alpha}(\partial D), \\
S_0 : &\quad C^{1,\alpha}(\partial D) \to C^{2,\alpha}(\partial D), \\
T : &\quad C^{2,\alpha}(\partial D) \to C^{1,\alpha}(\partial D)
\end{aligned}$$

beschränkte Operatoren. Zum Beweis dieser Aussagen siehe [Ki1], Sätze 2.8, 2.11 und 2.12 oder [Ki2], Theorem 3.3.

II. Es bleibt nachzuweisen, daß das kombinierte modifizierte Einfach- und Doppelschichtpotential $S_4\varphi$ mit hölderstetig differenzierbarer Dichte φ ein Element von $C^{2,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$ ist.

a) Wir betrachten zunächst das Einfachschichtpotential $S_1\varphi$. Es gilt für x aus $I\!R^3 \setminus \overline{D}$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{grad} S_1\varphi)(x) &= \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x,y)\varphi(y)ds(y) \\
&= -\int_{\partial D} (\mathrm{grad}_y \Phi)(x,y)\varphi(y)ds(y) \\
&= -\int_{\partial D} (\mathrm{Grad}_y \Phi)(x,y)\varphi(y)ds(y) \\
&\qquad\qquad - \int_{\partial D} (\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)})(x,y)\nu(y)\varphi(y)ds(y) \\
&= -\int_{\partial D} (\mathrm{Grad}_y[\Phi(x,y)\varphi(y)])ds(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_{\partial D} \Phi(x,y)(\mathrm{Grad}\varphi)(y)ds(y) \\
&\quad - \int_{\partial D} (\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)})(x,y)\nu(y)\varphi(y)ds(y) \\
= &\quad -2\int_{\partial D} \Phi(x,y)H(y)\nu(y)\varphi(y)ds(y) \\
&\quad + \int_{\partial D} \Phi(x,y)(\mathrm{Grad}\varphi)(y)ds(y) \\
&\quad - \int_{\partial D} (\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)})(x,y)\nu(y)\varphi(y)ds(y),
\end{aligned}
$$

wobei Theorem 2.1 aus [CK1] benutzt wurde. Es sind H aus $C^{0,\alpha}(\partial D)$ und ν aus $C^{1,\alpha}(\partial D)$. Somit sind nach Theorem 2.17 und 2.23 aus [CK1] alle Integrale aus $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$.

b) Wir untersuchen nun das Doppelschichtpotential $S_2 S_0^2 \varphi$. Es gilt für $x \in I\!R^3 \setminus \overline{D}$ nach Theorem 2.23 von [CK1]

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{grad} S_2 S_0^2 \varphi)(x) &= \kappa^2 \int_{\partial D} \Phi(x,y)\nu(y)(S_0^2\varphi)(y)ds(y) \\
&\quad + \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x,y) \times [\nu(y) \times (\mathrm{Grad} S_0^2 \varphi)(y)]ds(y).
\end{aligned}
$$

Es ist $S_0^2\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial D)$. Daher gilt $\nu(y) \times (\mathrm{Grad} S_0^2\varphi)(y) \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Das zweite Integral besteht aus partiellen Ableitungen des Einfachschichtpotentials mit hölderstetig differenzierbarer Dichte. Diese sind nach Teil a) aus $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$. Das erste Integral ist nach Teil a) aus $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$. Somit folgt

$$
\mathrm{grad} S_2 S_0^2 \varphi \in C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D).
$$

□

4.4 Das elektromagnetische Streuproblem am idealen Leiter

Nun soll es um die Streuung elektromagnetischer Wellen gehen. Auch in diesem Abschnitt folgen wir mit Definition 4.14 bis Satz 4.18 der Darstellung von Colton und Kress. Um im vektorwertigen Fall die Fréchet Differenzierbarkeit des Streuproblems nachzuweisen, werden danach in Korollar 4.19 zunächst Projektionsoperatoren in die Lösungsdarstellung eingeschoben. Damit können wir dann die Ergebnisse von Kapitel 3 nutzen und auch hier einen Differentiationssatz beweisen. Zur Charakterisierung der Fréchet Ableitung benötigen wir die Fortsetzbarkeit des Gradienten des gestreuten elektrischen Feldes bis auf den Rand des Gebietes D. Diese wird in Satz 4.21 nachgewiesen.

Definition 4.14 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $I\!R^3 \setminus D$ zusammenhängend. Wir bezeichnen als das* **elektromagnetische Streuproblem** *am* **idealen Leiter** *die folgende Fragestellung: Sei E^i, H^i Lösung der Maxwell Gleichungen in $I\!R^3$. Gesucht ist ein gestreutes Feld E^s, H^s, welches in $I\!R^3 \setminus \overline{D}$ die Maxwell Gleichungen löst und die Silver Müller Ausstahlungsbedingung erfüllt, so daß das Gesamtfeld $E := E^i + E^s,\ H := H^i + H^s$ der Randbedingung $\nu \times E = 0$ genügt.*

Nach Umbenennung der unbekannten Felder führt das elektromagnetische Streuproblem am idealen Leiter auf das

Definition 4.15 Äußere Maxwellproblem: *Sei c ein Tangentialfeld an ∂D mit $c \in T_d^{0,\alpha}(\partial D)$. Gesucht ist eine ausstrahlende Lösung*

$$E, H \in C^1(I\!R^3 \setminus \overline{D}) \cap C(I\!R^3 \setminus D)$$

der Maxwell Gleichungen $\mathrm{curl}E - i\kappa H = 0, \ \ \mathrm{curl}H + i\kappa E = 0$ *in $I\!R^3 \setminus \overline{D}$, welche die Randbedingung $\nu \times E = c$ auf ∂D erfüllt.*

Satz 4.16 *Das äußere Maxwellproblem hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Der Beweis folgt aus Theorem 6.10 von [CK2]. □

Satz 4.17 (Lösung des äußeren Maxwellproblems.) *Das äußere Maxwellproblem hat eine eindeutige Lösung. Sie wird gegeben durch die Funktion*

$$E = 2E_3(I + M + i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} c, \qquad H = \frac{1}{i\kappa}\mathrm{curl}E \tag{4.12}$$

wobei die Inverse des Operators $(I + M + i\eta N P_1 S_0^2) : T_d^{0,\alpha}(\partial D) \to T_d^{0,\alpha}(\partial D)$ stetig ist.

Bemerkung: In Gleichung (4.12) ist zunächst mit P_1 der in Abschnitt 3.1 definierte Operator für $r \equiv 0$ gemeint, er trägt in [CK2] die Bezeichung P. Betrachtet man die Gleichung für ein Gebiet D_r und transformiert sie auf ∂D_0, so erhält man genau $P_1(r)$.

Beweis: Siehe [CK2], Theorem 6.19 und dessen Beweis: es wird unter Ausnutzung der Sprungrelationen für die Vektorpotentiale der magnetischen und elektrischen Dipolverteilung gezeigt, daß das Potential $E_3 a$ – vgl. Abschnitt 3.1 – das äußere Maxwellproblem löst, falls die Dichte $a \in T_d^{0,\alpha}$ eine Lösung der Integralgleichung

$$(I + M + i\eta N P_1 S_0^2)a = 2c$$

ist. Die Invertierbarkeit des Operators und die Stetigkeit der Inversen führt man mit Hilfe des Satzes von Riesz und der Kompaktheitseigenschaften von M und $NP_1S_0^2$ in $T_d^{0,\alpha}(\partial D)$ auf seine Injektivität in $T_d^{0,\alpha}(\partial D)$ zurück. Die Injektivität von $I + M + i\eta NP_1S_0^2$ wird in [CK2] unter Ausnutzung der Eindeutigkeit des äußeren Maxwellproblems und des Gauß'schen Integralsatzes nachgewiesen. □

Aus Satz 4.17 ergibt sich die Lösbarkeit des elektromagnetischen Streuproblems:

Satz 4.18 (Lösung des elektromagnetischen Streuproblems.) *Das elektromagnetische Streuproblem hat eine eindeutige Lösung. Sie wird gegeben durch die Funktion*

$$E^s = -2E_3(I + M + i\eta NP_1S_0^2)^{-1}R_3E^i, \qquad H^s = \frac{1}{i\kappa}\mathrm{curl}E^s, \tag{4.13}$$

wobei R_3 der in Abschnitt 3.1 definierte Spuroperator ist. □

Wir betrachten nun die Lösung des elektromagnetischen Streuproblems für ein Gebiet D_r. Die entstehende Integralgleichung über ∂D_r transformieren wir auf ∂D_0. Es entsteht

$$E^s(r) = -2E_3(r)(I + M(r) + i\eta N(r)P_1(r)S_0^2(r))^{-1}R_3(r)E^i.$$

Wir wollen allerdings der Übersichtlichkeit halber die Abhängigkeit von r nicht immer wieder aufführen und zur Gleichung (4.13) zurückkehren.

Korollar 4.19 *Die Lösung des elektromagnetischen Streuproblems wird gegeben durch die Funktion*

$$E^s = -2[E_3P_2]\,[(I + P_0MP_2 + i\eta P_0NP_1S_0^2P_2)^{-1}]\,[P_0R_3]E^i, \qquad H^s = \frac{1}{i\kappa}\mathrm{curl}E^s. \tag{4.14}$$

Bemerkung: Der Operator P_0 ist der orthogonale Projektionsoperator auf die Tangentialebene von ∂D_0, welcher im Fall $r \equiv 0$ mit P_1 übereinstimmt (vgl. Abschnitt 3.1). P_2 ist ein i.A. nicht orthogonaler Projektionsoperator in die Tangentialebene von ∂D_r, welcher bei Einschränkung auf die Tangentialebenen von ∂D_0 und ∂D_r zu P_0 invers ist. Er hängt wesentlich von r ab.

Beweis: Die Gleichung (4.14) folgt sofort aus (4.13) durch zweifachen Einschub der Identität $I_{T(\partial D_r)} = P_2P_0$, Ausnutzung des Assoziativgesetzes für Abbildungen und die Beziehung

$$\begin{aligned}(P_0(I+A)^{-1}P_2) &= (P_0(I+A)P_2)^{-1}\\ &= (I + P_0AP_2)^{-1},\end{aligned}$$

falls $(I + A)$ invertierbar ist. □

Satz 4.20 (Fréchet Differenzierbarkeit des elektromagnetischen Streuproblems.) *Sei D beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}-$glattem Rand. Die Abbildung $\mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho \to C(M), r \mapsto (E^s, H^s)$, welche durch* (4.13) *definiert wird und den Rand des Gebietes D_r auf die Lösung des elektromagnetischen Streuproblems am idealen Leiter bei festem einfallenden Feld (E^i, H^i) wirft, ist $F^\infty-$glatt. Man erhält die erste Ableitung durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^s}{\partial r} &= -2\frac{\partial[E_3P_2]}{\partial r}[P_0(I + M + i\eta NP_1S_0^2)^{-1}P_2]\,[P_0R_3]E^i\\ &\quad +2\,[E_3P_2]\,[P_0(I + M + i\eta NP_1S_0^2)^{-1}P_2]\\ &\qquad \cdot\frac{\partial P_0[M + i\eta NP_1S_0^2]P_2}{\partial r}\,[P_0(I + M + i\eta NP_1S_0^2)^{-1}P_2]\,[P_0R_3]E^i\\ &\quad +2\,[E_3P_2]\,[P_0(I + M + i\eta NP_1S_0^2)^{-1}P_2]\,\frac{\partial[P_0R_3]}{\partial r}E^i \qquad (4.15)\\ \frac{\partial H^s}{\partial r} &= \frac{1}{i\kappa}\mathrm{curl}\frac{\partial E^s}{\partial r}. \qquad (4.16)\end{aligned}$$

Beweis: Wir überzeugen uns von der Fréchet Differenzierbarkeit der in Gleichung (4.14) auftretenden Operatoren. Betrachten wir zunächst die Projektionsoperatoren $P_0, ..., P_2$ und R_3. P_0 ist unabhängig von r und somit $F^\infty-$glatt als Abbildung

$$\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C^{n,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3), CT^{n,\alpha}(\partial D))$$

für $n = 0, 1$ bzw.

$$\mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C(\partial D, \mathbb{C}^3), CT(\partial D)).$$

Die $F^\infty-$Glattheit von P_1 als Abbildung

$$P_1 : \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C^{n,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{n,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3))$$

für $n = 0, 1$ bzw.

$$P_1 : \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C(\partial D, \mathbb{C}^3), C(\partial D, \mathbb{C}^3))$$

folgt aus Lemma 3.8. Auch die $F^\infty-$Glattheit der Operatoren P_2 und R_3 in den jeweils entsprechenden Räumen erhält man analog. Es ist bei diesen Operatoren nicht mehr möglich, in den Tangentialräumen zu arbeiten, da die Fréchet Ableitung aus diesen Räumen herausfällt. Die Differenzierbarkeitseigenschaften des Operators S_0^2 als Abbildung

$$S_0^2 : \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{1,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3))$$

erhält man aus den Sätzen 3.14 und 3.18. Die $F^\infty-$Glattheit von

$$N : \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C^{1,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3))$$

ist in Korollar 3.15 festgehalten. Wir fassen $\hat{M} = M \circ P_2$ zusammen. Die $F^\infty-$Glattheit von $\hat{M}$ als Abbildung

$$\hat{M} : \ \mathcal{C}_\rho^{2,\alpha} \to BL(C(\partial D, \mathbb{C}^3), C^{0,\alpha}(\partial D, \mathbb{C}^3))$$

folgt aus Satz 3.14 und Gleichung (3.1). Es folgt daraus die $F^\infty-$Glattheit des Operators

$$I + P_0 M P_2 + i\eta P_0 N P_1 S_0^2 P_2$$

als Abbildung $\mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho \to BL(C(\partial D,\mathbb{C}^3),C(\partial D,\mathbb{C}^3))$ und mit Hilfe von Satz 3.2 auch die $F^\infty-$Glattheit seiner Inversen. Die $F^\infty-$Glattheit von E_3 als Abbildung

$$E_3: \quad \mathcal{C}^{2,\alpha}_\rho \to BL(C(\partial D,\mathbb{C}^3),C^\xi(G,\mathbb{C}^3))$$

erhält man nach Definition von E_3 durch E_1 und E_2 nach Satz 3.14. Daraus folgt die $F^\infty-$Glattheit der Abbildung (E^s,H^s). Die Form der ersten Ableitung ergibt sich unter Anwendung der Kettenregel. □

Zur Charakterisierung der Fréchet Ableitung des elektromagnetischen Streuproblems am idealen Leiter, wie sie in Kapitel 5 vorgenommen wird, benötigen wir die im folgenden Satz festgehaltene Glattheit der Lösung bis zum Rand.

Satz 4.21 *Sei $D \subset I\!R^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}-$glattem Rand. Dann gilt für die Lösung (E^s,H^s) des elektromagnetischen Streuproblems*

$$E^s \in C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D).$$

Beweis: Wir betrachten die durch (4.13) gegebene Abbildung. Es ist

$$R_3E^i \in CT^{1,\alpha}(\partial D).$$

I. Der Operator $(I+M+i\eta NP_1S_0^2)^{-1}$ bildet $CT^{1,\alpha}(\partial D)$ beschränkt nach $CT^{1,\alpha}(\partial D)$ ab, denn es gilt $NP_1S_0^2a = NS_0^2a$ und wir haben die folgenden Abbildungseigenschaften der beteiligten Operatoren: Es sind

$$\begin{aligned}
M &: CT^{0,\alpha}(\partial D) \to CT^{1,\alpha}(\partial D)\\
S_0 &: C^{0,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3) \to C^{1,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3)\\
S_0 &: C^{1,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3) \to C^{2,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3)\\
N &: C^{2,\alpha}(\partial D,\mathbb{C}^3) \to CT^{1,\alpha}(\partial D)
\end{aligned}$$

beschränkte Operatoren. Die Abbildungseigenschaften von M und S_0 sind in [Ki2], Theoreme 2.5, 2.1 und 3.3 festgehalten. Betrachten wir den Operator N. Der erste Summand besteht aus Einfachschichtpotentialen und hat somit die behaupteten Eigenschaften. Wir wollen noch zeigen, daß der durch

$$(B\varphi)(x) := \nu(x) \times \int_{\partial D} \operatorname{grad}_x \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

definierte Operator $B : C^{1,\alpha}(\partial D) \to CT^{1,\alpha}(\partial D)$ beschränkt ist. Betrachte das Einfachschichtpotential

$$w(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in I\!R^3.$$

Dann ist nach Satz 4.13 die Funktion $w \in C^{2,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$ und hat nach den klassischen Sprungrelationen die Randwerte

$$\begin{aligned}(\nu(x) \times \mathrm{grad} w_+)(x) &= \nu(x) \times \int_{\partial D} \mathrm{grad}_x \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y) \\ &= (B\varphi)(x).\end{aligned}$$

Es ist also $B\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ und ebenso $B\varphi \in T(\partial D)$, woraus die Aussage über den Operator N folgt.

II. Wir betrachten zunächst das Potential E_1. Es gilt für $x \in I\!R^3 \setminus \overline{D}$

$$(E_1 a)(x) = \mathrm{curl} \int_{\partial D} \Phi(x,y)a(y)ds(y).$$

Es folgt $E_1 a \in C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$ aus Satz 4.13.

Wir untersuchen nun das Potential $E_2 S_0^2 a$. Es gilt für $x \in I\!R^3 \setminus \overline{D}$ nach (6.40) und (6.38) von [CK2]

$$\begin{aligned}(E_2 S_0^2 a)(x) &= \kappa^2 \int_{\partial D} (\nu(y) \times S_0^2 a(y))\Phi(x,y)ds(y) \\ &\quad - \mathrm{grad} \int_{\partial D} \nu(y) \cdot \mathrm{curl}(S_0^2 a)(y)\Phi(x,y)ds(y).\end{aligned}$$

Es ist $S_0^2 \in C^{2,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$. Daher gilt $\langle \nu, \mathrm{curl}(S_0^2 a)\rangle \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Das zweite Integral besteht aus partiallen Ableitungen des Einfachschichtpotentials mit hölderstetig differenzierbarer Dichte. Dieses sind nach Satz 4.13 in $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$. Auch das erste Integral ist in $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$ nach Satz 4.13 oder Theorem 2.17 von [CK1]. Somit folgt $E_2 S_0^2 a \in C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$. $\square$

Kapitel 5

Charakterisierungen der Ableitungen von Randwertproblemen

Im vierten Kapitel wurde für die Lösungen von Randwertproblemen die Differenzierbarkeit nach dem Rand des Streugebietes nachgewiesen. Es wurde auch ein Weg zur Berechnung der Fréchet Ableitungen aufgezeigt. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß es noch eine effektivere Möglichkeit zur Berechnung der Fréchet Ableitungen gibt. Die Ableitungen sind wieder Lösungen von Randwertproblemen und können somit mit den bekannten Methoden zu deren Bearbeitung numerisch berechnet werden. Die im folgenden hergeleiteten Charakterisierungen sind darüber hinaus auch von theoretischem Interesse.

In drei Abschnitten beschäftigen wir uns nacheinander mit den beiden akustischen und dem elektromagnetischen Streuproblem.

5.1 Das akustische Streuproblem am schallweichen Hindernis

Gegenstand des Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 5.1 *Die Fréchet Ableitung* $\frac{\partial u^s}{\partial r}$ *der Streuabbildung* u^s *zum Streuproblem am schallweichen Hindernis* D *wird an der Stelle* $r = 0$ *und mit dem Argument* $h \in C^2(\partial D, I\!R^3)$ *durch die Lösung des äußeren Dirichletproblems zum Gebiet* D *mit den Randwerten*

$$-\Big\langle h(x), \mathrm{grad}_x u(x) \Big\rangle = -\Big\langle h(x), \nu(x) \Big\rangle \frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \quad x \in \partial D, \tag{5.1}$$

gegeben, wobei $u = u^i + u^s$ *die Lösung des ursprünglichen Streuproblems zum Gebiet* D *darstellt.*

Beweis: Wir werden zeigen, daß die durch Satz 4.6, Gleichung (4.7), gegebene Funktion eine Lösung des äußeren Dirichletproblems mit den angegebenen Randwerten ist. $\frac{\partial u^s}{\partial r}(r, h)$ löst die Helmholtzgleichung in $I\!R^3 \setminus \overline{D}$ und genügt der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung, wovon man sich anhand der Darstellung (4.7) durch Blick auf die Potentiale überzeugen kann. Es bleiben die Randwerte zu berechnen, was nun ausgeführt werden soll.

Vorbemerkung: Im Prinzip gehen wir im folgenden mit denselben Techniken vor, wie sie in [CK1] zur Berechnung der Randwerte von Einfach- und Doppelschichtpotential benutzt werden. Dabei wird jeweils unter dem Integral durch die Subtraktion bzw. die Addition eines geeigneten Termes die Singularität des Kerns erniedrigt, so daß die Stetigkeit des entstehenden Potentials nachgewiesen werden kann. Der subtrahierte Term wird wieder addiert, er muß also derart gewählt sein, daß seine Randwerte berechnet werden können. Im Fall der Randwerte der Fréchet Ableitung $\partial S_3(r)\varphi/\partial r$ des Potentials S_3 ergibt sich ein möglicher zu addierender Term genau durch Fréchet Differentiation von $(S_3(r)\varphi)(r, h, x^\tau_{\tilde{r}})$ nach $\tilde{r}$ an der Stelle $\tilde{r} = r$, wobei $x^\tau_{\tilde{r}}$ durch

$$x^\tau_r := x + r(x) + \nu(r, x) \cdot \tau. \tag{5.2}$$

definiert ist. Differenziert man nun statt $S_3(r)$ den gesamten Ausdruck

$$S_3(r)\varphi(r, x^\tau_r) \tag{5.3}$$

nach r, so wird nach der Kettenregel genau der richtige Term addiert, der dann im Anschluss wieder subtrahiert werden muß. Diese Beobachtungen werden in Gleichung (5.5) ausgenutzt. Hinzu kommt die folgende Beobachtung: Der Grenzwert der Fréchet Ableitung von (5.3) für $\tau \to 0$ ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(K - i\eta S)}{\partial r}\varphi.$$

Dies ist bei der Dichte $\varphi = (I + K - i\eta S)^{-1} R_1 u^i$ genau der Grenzwert der zweiten Zeile von (4.7). Da die Vorzeichen in (4.7) verschieden sind, hebt sich dieser Term also heraus und die Randwerte der ersten beiden Terme ergeben sich durch die Randwerte der Fréchet Ableitung des Ausdrucks $S_3(r)\varphi)(r, h, x^\tau_{\tilde r})$ nach $\tilde r$.

Wir betrachten einen kleinen Streifen um den Rand ∂D des Gebietes D. Sei τ_0 hinreichend klein. Wir schreiben x^τ für x^τ_0. Dann wird für $r = 0$ durch (5.2) für $|\tau| < \tau_0$ der Streifen

$$D^{\tau_0} := \{x \in I\!R^3, \min_{y \in \partial D} |x - y| < \tau_0\}$$

bijektiv auf die Menge $\{(x, \tau), x \in \partial D, -\tau_0 < \tau < \tau_0\}$ abgebildet.

Wir wollen die Randwerte der Potentiale an der Stelle $r = 0$ berechnen. Um übersichtlich zu bleiben führen wir das Argument r nur dann auf, wenn die Operatoren auch für von Null verschiedene Argumente r betrachtet werden, wenn also etwa eine Fréchet Ableitung auftritt. $\frac{\partial S_3}{\partial r}(0, h)$ bedeutet, daß S_3 nach r differenziert wird und diese Ableitung an der Stelle $r = 0$ betrachtet wird. □

I. Zunächst berechnen wir die Randwerte von $S_3(I + K - i\eta S)^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial r} u^i$, d.h. den letzten Term von (4.7), an der Stelle $r = 0$. Es gilt

$$\lim_{\tau \to 0} (2S_3\varphi)(x^\tau) = \Big((I + K - i\eta S)\varphi\Big)(x), x \in \partial D,$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} \Big(-2S_3(I + K - i\eta S)^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial r}(0, h) u^i\Big)(x^\tau) &= -\Big(\frac{\partial R_1}{\partial r}(0, h)u^i\Big)(x) \\
&= -\Big\langle h(x), \mathrm{grad} u^i(x)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

II. Nun wollen wir zeigen, daß für den Grenzwert der ersten beiden Terme in (4.7) an der Stelle $r = 0$ die Gleichung

$$\lim_{\tau \to 0} \Big\{ -2\Big(\frac{\partial S_3}{\partial r}(0, h)(I + K - i\eta S)^{-1} R_1 u^i\Big)(x^\tau)$$

$$+2\Big(S_3(I+K-i\eta S)^{-1}\frac{\partial(K-i\eta S)}{\partial r}(0,h)(I+K-i\eta S)^{-1}R_1u^i\Big)(x^\tau)\Big\}$$
$$= -\Big\langle h(x), \mathrm{grad}\ u^s(x)\Big\rangle. \tag{5.4}$$

gilt. Wie zu Anfang des Beweises beschrieben erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel nach Umstellen die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{2S_3(r)\varphi\Big\}(0,h,x^\tau) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial r}\Big\{(2S_3\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h) - \Big\langle h(x), \mathrm{grad}\left\{2S_3\varphi\right\}(x^\tau)\Big\rangle \\ &\quad -\Big\langle \tau\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x), \mathrm{grad}\left\{2S_3\varphi\right\}(x^\tau)\Big\rangle. \end{aligned}\tag{5.5}$$

Wir setzen in (5.5) $\varphi := (I+K-i\eta S)^{-1}R_1u^i$ und nutzen

$$u^s = -2S_3(I+K-i\eta S)^{-1}R_1u^i,$$

um für den ersten Term von (5.4) die Gleichung

$$-2\Big(\frac{\partial S_3}{\partial r}(0,h)(I+K-i\eta S)^{-1}R_1u^i\Big)(x^\tau) = -2\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(S_3(r)\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h)$$
$$-\Big\langle h(x), \mathrm{grad}\ u^s(x^\tau)\Big\rangle - \Big\langle \tau\cdot\frac{\partial\nu(r,x)}{\partial r}(h), \mathrm{grad}\ u^s(x^\tau)\Big\rangle$$

zu erhalten. Lösungen u^i der Helmholtzgleichung sind analytisch, somit ist R_1u^i sicherlich in $C^{1,\alpha}(\partial D)$. Ferner wirft die Abbildung $(I+K-i\eta S)^{-1}$ den Raum $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$, woraus $\varphi\in C^{1,\alpha}(\partial D)$ folgt. Einfach- und Doppelschichtpotential mit Dichte φ sind dann in $C^1(\mathbb{R}^3\setminus D)$ (vgl. [CK1]). Also konvergiert der Term

$$-\Big\langle h(x), \mathrm{grad}\ u^s(x^\tau)\Big\rangle - \Big\langle \tau\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x), \mathrm{grad}\ u^s(x^\tau)\Big\rangle$$

gegen $-\Big\langle h(x), \mathrm{grad}\ \ u^s(x)\Big\rangle$ für $\tau\to 0$. Aus den klassischen Sprungrelationen – vgl. die Sätze 2.12 und 2.13 von [CK1] – folgt die Beziehung

$$\lim_{\tau\to 0}(2S_3(I+K-i\eta S)^{-1}\varphi)(x^\tau) = \varphi(x), x\in\partial D.$$

Um nun Gleichung (5.4) nachzuweisen, muß nur noch

$$\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(-2S_3\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h)+\frac{\partial}{\partial r}\Big\{K-i\eta S\Big\}(0,h)\varphi(x)\right\}=0 \tag{5.6}$$

bewiesen werden. Wir führen den Beweis im potentialtheoretischen Fall $\kappa = 0$ aus. Der Fall $\kappa \neq 0$ kann analog behandelt werden. Wir betrachten die Anteile S_2 und $-i\eta S_1$ des Potentials S_3 nacheinander.

III. Zunächst zeigen wir

$$\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(-2S_1\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h)+\frac{\partial S}{\partial r}(0,h)\varphi(x)\right\}=0. \tag{5.7}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(-2)(S_1\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h) &= 2\int_{\partial D}\frac{\langle x^\tau-y,h(x)-h(y)\rangle}{|x^\tau-y|^3}\varphi(y)ds(y)\\ &- 2\int_{\partial D}\frac{1}{|x^\tau-y|}\frac{\partial J}{\partial r}(0,h,y)\varphi(y)ds(y) \qquad (5.8)\\ &+ \tau\cdot 2\int_{\partial D}\frac{\langle x^\tau-y,\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x)\rangle}{|x^\tau-y|^3}(y)\varphi(y)ds(y).\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der ersten zwei Terme der rechten Seite von (5.8) für $\tau \to 0$ und der Grenzwert

$$\begin{aligned}&2\int_{\partial D}\frac{\langle x-y,h(x)-h(y)\rangle}{|x-y|^3}\varphi(y)ds(y)\\ &\qquad -2\int_{\partial D}\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial J}{\partial r}(0,h,y)\varphi(y)ds(y) = -\frac{\partial S}{\partial r}(0,h)\varphi(x)\end{aligned}$$

ist eine Konsequenz von Theorem 2.7 von [CK1]. Das dritte Integral von (5.8) kann in der Form

$$\Big\langle\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x),\Big(\mathrm{grad}_x\int_{\partial D}\frac{1}{|x-y|}\varphi(y)ds(y)\Big)\Big|_{x^\tau}\Big\rangle \tag{5.9}$$

geschrieben werden. Wegen $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ ist der Term (5.9) als Konsequenz von Theorem 2.17 von [CK2] beschränkt für $\tau > 0$. Wir erhalten

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\cdot 2\Big\langle\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x),\Big(\mathrm{grad}_x\int_{\partial D}\frac{1}{|x-y|}\varphi(y)ds(y)\Big)\Big|_{x^\tau}\Big\rangle=0$$

und damit (5.7).

IV. Nun zeigen wir

$$\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(-2S_2\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h)+\frac{\partial K}{\partial r}(0,h)\varphi(x)\right\}=0. \tag{5.10}$$

Wir nutzen die Zerlegung $v_r(x_r^\tau)=\varphi(x)w_r(x_r^\tau)+u_r(x_r^\tau)$, wobei v_r das Doppelschichtpotential auf ∂D_r mit Dichte φ bezeichnet. w_r steht für das Doppelschichtpotential mit konstanter Dichte 1 und wir setzen

$$u_r(x_r^\tau):=\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x_r^\tau,y_r)}{\partial\nu(r,y)}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]J_r(y)ds(y). \tag{5.11}$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(-2S_2\varphi)(x_r^\tau)\Big\}=-2\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\varphi(x)w_r(x_r^\tau)+u_r(x_r^\tau)\Big\}=-2\frac{\partial}{\partial r}\Big\{u_r(x_r^\tau)\Big\}$$

und

$$\frac{\partial K}{\partial r}\varphi(x)=2\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\varphi(x)w_r(x_r)+u_r(x_r)\Big\}=2\frac{\partial}{\partial r}\Big\{u_r(x_r)\Big\}$$

wegen $w_r(x_r^\tau)=1$ für $\tau>0$ und $w_r(x_r^\tau)=0.5$ für $\tau=0$ für alle $r\in V_l$. Es bleibt die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{u_r(x_r^\tau)\right\}(0,h)$ in τ an der Stelle $\tau=0$ nachzuweisen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{u_r(x_r^\tau)\Big\}(0,h)&=\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial r}\Big\langle\nu(r,y),x_r^\tau-y_r\Big\rangle(0,h)\frac{1}{|x^\tau-y|^3}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]ds(y)\\
&+\int_{\partial D}\Big\langle\nu(y),x^\tau-y\Big\rangle\frac{(-3)\Big\langle x^\tau-y,\frac{\partial}{\partial r}\{x_r^\tau-y_r\}(0,h)\Big\rangle}{|x^\tau-y|^5}\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]ds(y)\\
&+\int_{\partial D}\Big\langle\nu(y),x^\tau-y\Big\rangle\frac{1}{|x^\tau-y|^3}\frac{\partial J}{\partial r}(0,h,y)\Big[\varphi(y)-\varphi(x)\Big]ds(y),\end{aligned} \tag{5.12}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big\{x_r^\tau-y_r\Big\}(0,h)=h(x)-h(y)+\frac{\partial\nu}{\partial r}(0,h,x)\cdot\tau \tag{5.13}$$

mit

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\Big\{x_r^\tau-y_r\Big\}(0,h)\right|\le c\,|x^\tau-y|\,. \tag{5.14}$$

Nutzt man die Abschätzung (3.31), so folgt die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{u_r(x_r^\tau)\right\}(0,h)$ aus dem folgenden Lemma.

□

Lemma 5.2 *Sei $\varphi \in C(\partial D)$. Wir setzen*

$$\tilde{u}_1(x^\tau) := \int_{\partial D} \Big\langle \nu(y), x^\tau - y \Big\rangle K(h,\tau,x,y) \frac{1}{|x^\tau - y|^3} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] ds(y) \qquad (5.15)$$

und

$$\tilde{u}_2(x^\tau) := \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial r} \Big\langle \nu(r,y), x_r^\tau - y_r \Big\rangle (0,h) \frac{1}{|x^\tau - y|^3} \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] ds(y), \qquad (5.16)$$

wobei wir für den beschränkten Kern $K(h,\tau,x,y)$ stetige Differenzierbarkeit nach τ für $x \neq y$ und $\left|\frac{\partial K}{\partial \tau}(h,\tau,x,y)\right| \leq \frac{C}{|x^\tau - y|}$ für $x \neq y$ voraussetzen. Dann sind $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ stetig in $D_r^{\tau_0}$.

Beweis: Die Integrale existieren wegen (3.31) für $\tau = 0$ als uneigentliche Integrale und sind stetige Funktionen auf ∂D. Wir weisen die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{\tau \to 0} \tilde{u}_i(x^\tau) = \tilde{u}_i(x), \quad i = 1, 2,$$

auf ∂D nach. Wir führen den Beweis für $\tilde{u}_1$ aus.
Wir setzen

$$\Psi(h,x,y) := \Big\langle \nu(y), x - y \Big\rangle \; K(h,\tau,x,y) \frac{1}{|x-y|^3}.$$

Mit (3.31) erhalten wir für hinreichend kleine τ

$$\begin{aligned} |x^\tau - y|^2 &= |x-y|^2 + 2\langle x - y, x^\tau - x\rangle + |x^\tau - x|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\{\, |x-y|^2 + |x^\tau - x|^2 \,\}. \end{aligned}$$

Dann folgt mit Hilfe der Zerlegung

$$\Big\langle \nu(y), x^\tau - y \Big\rangle = \Big\langle \nu(y), x^\tau - x \Big\rangle + \Big\langle \nu(y), x - y \Big\rangle$$

für alle $q < Q$ mit einer Projektion auf die Tangentialebene

$$\begin{aligned} \int_{S_{x,q}} |\Psi(h,x^\tau,y)|\, ds(y) &\leq C \left\{ \int_0^q d\varrho + |x^\tau - x| \int_0^\infty \frac{\varrho d\varrho}{(\varrho^2 + |x^\tau - x|^2)^{3/2}} \right\} \\ &= C(q+1) \leq C(Q+1) \end{aligned} \qquad (5.17)$$

mit $S_{x,q} := \partial D \cap \Omega_q(x)$ und einer Konstanten C, welche von ∂D abhängt. Eine Anwendung des Mittelwertsatzes liefert

$$|\Psi(h, x^\tau, y) - \Psi(h, x, y)| \leq C_2 \frac{|x^\tau - x|}{|x-y|^3}$$

für $2\,|x^\tau - x| \leq |x - y|$ und somit

$$\int_{\partial D \setminus S_{x,q}} |\Psi(h, x_r^\tau, y) - \Psi(h, x, y)| ds(y) \leq C_3 \frac{|x^\tau - x|}{q^3} \tag{5.18}$$

mit Konstanten C_2 und C_3. Aus (5.17) und (5.18) folgt nun

$$|\tilde{u}_1(x^\tau) - \tilde{u}_1(x)| \leq C\Big\{ \sup_{|y-x|\leq q} |\varphi(y) - \varphi(x)| + \frac{|x^\tau - x|}{q^3} \Big\} \tag{5.19}$$

mit einer Konstanten C. Zu $\epsilon > 0$ können wir $q > 0$ mit

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| < \frac{\epsilon}{2C}$$

für alle $y, x \in \partial D$ mit $|y - x| < q$ wählen, denn φ ist gleichmäßig stetig auf ∂D. Nun sei $\delta < (\epsilon/2C)q^3$. Es gilt dann

$$|u(x^\tau) - u(x)| < \epsilon$$

für alle $|x^\tau - x| < \delta$ und der erste Teil des Lemmas ist bewiesen. Den zweiten Teil beweist man durch ein analoges Vorgehen, indem man stets $\langle \nu(y), x^\tau - y \rangle$ durch $\frac{\partial}{\partial r} \langle \nu(y), x^\tau - y \rangle (0, h)$ ersetzt. □

Bemerkung: Wir wollen die Aussage des vorausgehenden Satzes von einem heuristischen Standpunkt betrachten. Die Fréchet Ableitung des gestreuten Feldes besteht aus einer Summe zweier Terme mit den Randwerten

$$-\Big\langle h(x), (\mathrm{grad} u^i)(x_r) \Big\rangle \qquad \text{und} \qquad - \Big\langle h(x), (\mathrm{grad} u^s)(x_r) \Big\rangle.$$

Der erste Term beschreibt die Veränderung von u^s, wenn die Randwerte durch Translation des einfallenden Feldes bei festem Rand verändert werden. Den zweiten Term kann man lokal als Veränderung von u^s betrachten, wenn der Rand des Gebietes in Richtung $h(x)$ translatiert wird. □

5.2 Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis

Wir wollen den folgenden Charakterisierungssatz für die Fréchet Ableitung des Streuproblems am schallharten Hindernis beweisen.

Satz 5.3 *Sei D ein Gebiet mit $C^{2,\alpha}-$glattem Rand. Die Fréchet Ableitung $\frac{\partial u^s}{\partial r}$ zum Streuproblem am schallharten Hindernis D wird an der Stelle $r = 0$ und mit dem Argument $h \in C^{2,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ durch die Lösung des äußeren Neumannproblems zum Gebiet D mit der Normalenableitung*

$$-\Big\langle \frac{\partial \nu}{\partial r}(h, x), (\mathrm{grad}\ u)(x) \Big\rangle \ - \ \sum_{i,j} h_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \nu_j(x), \ x \in \partial D \tag{5.20}$$

gegeben, wobei $u = u^i + u^s$ die Lösung des ursprünglichen Streuproblems zum Gebiet D darstellt.

Beweis: Wir werden zeigen, daß die durch Satz 4.12, Gleichung (4.11), gegebene Funktion Lösung des äußeren Neumannproblems mit den gegebenen Neumann-Randwerten ist. $\frac{\partial u^s}{\partial r}(h)$ löst die Helmholtzgleichung in $I\!R^3 \setminus \overline{D}$ und genügt der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung, wovon man sich anhand der Darstellung (4.11) durch Blick auf die Potentiale überzeugen kann. Es bleibt die Normalenableitung am Rand zu berechnen. Wir betrachten wie schon im Beweis von Satz 5.1 Streifen um den Rand ∂D des Gebietes D und wenden dieselbe Methode zur Berechnung der Randwerte an.

Vorbemerkung: Die Vorbemerkung des Beweises von Satz 5.1 bleibt hier gültig, wenn man die Rolle des Potentials S_3 durch die Normalenableitung des Potentials S_4 ersetzt. Wir nutzen die dort eingeführten Bezeichnungen

$$x_r^\tau := x + r(x) + \nu(r, x) \cdot \tau, \qquad x^\tau := x_0^\tau. \tag{5.21}$$

I. Zunächst berechnen wir an der Stelle $r = 0$ die Normalenableitung $\mathbf{N}u$ des Ausdrucks $u = S_4(I - K^* - i\eta T S_0^2)^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial r} u^i$ auf dem Rand des Gebietes D, d.h. wir bearbeiten den letzten Term von (4.11). Die klassischen Sprungrelationen liefern

$$\mathbf{N}S_4 = -\frac{1}{2}(I - K^* - i\eta T S_0^2), \tag{5.22}$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(2\mathbf{N}S_4(I-K'-i\eta TS_0^2)^{-1}\frac{\partial R_2}{\partial r}(0,h)u^i\Big)(x) &= -\Big(\frac{\partial R_2}{\partial r}(0,h)u^i\Big)(x)\\ = -\Big\langle\frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x),(\text{grad } u^i)(x)\Big\rangle &- \sum_{k,j}h_k(x)\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_k\partial x_j}(x)\nu_j(x).\end{aligned}$$

II. Nun wollen wir zeigen, daß für den Grenzwert der ersten beiden Terme in (4.11) an der Stelle $r=0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}&2\Big(\mathbf{N}\frac{\partial S_4}{\partial r}(0,h)(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i\Big)(x)\\ &+2\Big(\mathbf{N}S_4(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}\frac{\partial(K+i\eta TS_0^2)}{\partial r}(0,h)(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i\Big)(x)\\ = \;&-\Big\langle\frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x),(\text{grad } u^s)(x)\Big\rangle - \sum_{k,j}h_k(x)\frac{\partial^2 u^s(x)}{\partial x_k\partial x_j}\nu_j(x),\quad x\in\partial D \qquad (5.23)\end{aligned}$$

gilt. Für eine Funktion $w\in C^1(I\!R^3\setminus D_r)$ haben wir

$$(\mathbf{N}w)(x)=\lim_{\tau\to 0}\Big\langle\nu(x),(\text{grad}w)(x^\tau)\Big\rangle=\lim_{\tau\to 0}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{w(x^\tau)\Big\}.$$

Wir interessieren uns für die Funktion $w=\frac{\partial S_4}{\partial r}(I-K^*i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i$. Wir setzen $\varphi:=-(I-K^*-i\eta TS_0^2)^{-1}R_2u^i$, wobei hier die Operatoren an der Stelle $r=0$ betrachtet werden. Die Funktion φ ist also von r unabhängig. Wie in der Vorbemerkung angesprochen erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel nach Umstellen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{S_4\varphi\Big\}(0,h,x^\tau) &= \frac{\partial}{\partial r}\Big\{(S_4\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h)\\ &- \Big\langle\text{grad}(S_4\varphi)(x^\tau),\frac{\partial x_r^\tau}{\partial r}(0,h)\Big\rangle. \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Da für $C^{2,\alpha}-$glatten Rand die Lösung u^s des äußeren Neumannstreuproblems nach Satz 4.13 in $C^{2,\alpha}(I\!R^3\setminus D)$ ist, erhalten wir für den letzten Term von (5.24) an der Stelle $r = 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau}\Big\langle \mathrm{grad}(S_4\varphi)(x^\tau), \frac{\partial x_r^\tau}{\partial r}(0,h)\Big\rangle \\
= \; & \frac{\partial}{\partial \tau}\Big\langle \mathrm{grad}(S_4\varphi)(x^\tau),\ h(x) + \frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x)\,\tau\ \Big\rangle \\
= \; & \Big\langle \frac{\partial}{\partial \tau}\Big\{\mathrm{grad}(S_4\varphi)(x^\tau)\Big\},\ h(x) + \frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x)\,\tau\ \Big\rangle \\
& \quad + \ \Big\langle \mathrm{grad}(S_4\varphi)(x^\tau), \frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x)\Big\rangle \\
\to & \sum_{k,j} \nu_j(x) \frac{\partial^2 u^s(x)}{\partial x_k \partial x_j} h_k(x) \ + \ \Big\langle \mathrm{grad}\ u^s\ (x), \frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x)\Big\rangle
\end{aligned} \tag{5.25}$$

für $\tau \to 0$ mit $u^s = S_4\varphi$. Den Beweis von (5.23) reduzieren wir nun mit Hilfe von (5.24) und (5.25) auf den Nachweis der Beziehung

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ 2\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(S_4\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h) - \Big(\frac{\partial (K^* + i\eta T S_0^2)}{\partial r}(0,h)\varphi\Big)(x) \right\} = 0. \tag{5.26}$$

Wir untersuchen nacheinander die Anteile S_1 und $+i\eta S_2$ des Potentials S_4.

III. Zunächst zeigen wir

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ 2\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(S_1\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h) - \Big(\frac{\partial K^*}{\partial r}(0,h)\varphi\Big)(x) \right\} = 0. \tag{5.27}$$

Wir berechnen für $x \in \partial D$

$$\begin{aligned}
& 2\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial r}\Big\{(S_1\varphi)(x_r^\tau)\Big\}(0,h) \\
= \; & 2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \tau}\Big\{\int_{\partial D} \Phi(x_r^\tau, y_r) J_T(r,y)\varphi(y) ds(y)\Big\}(0,h) \\
= \; & 2\frac{\partial}{\partial r}\Big\langle \nu(r,x), \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r)\varphi(y) J_T(r,y) ds(y)\Big\rangle(0,h)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

und

$$\begin{aligned}
& \Big(\frac{\partial K^*}{\partial r}(0,h)\varphi\Big)(x) \\
& = 2\frac{\partial}{\partial r}\left\{\int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r, y_r)\Big\rangle \varphi(y) J_T(r,y) ds(y)\right\}(0,h).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Wir haben also die Stetigkeit von (5.28) an der Stelle $\tau = 0$ nachzuweisen. Wir nutzen die Zerlegung

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \Big\rangle \varphi(y) J_T(r,y) ds(y) \\
= \;& \varphi(x) \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \Big\rangle J_T(r,y) ds(y) \\
&+ \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \Big\rangle \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] J_T(r,y) ds(y) \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

und definieren

$$u_r(x_r^\tau) := \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \Big\rangle \Big[\varphi(y) - \varphi(x)\Big] J_T(r,y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Die Stetigkeit von $\frac{\partial(u_r(x_r^\tau))}{\partial r}(0,h)$ für $\tau \to 0$ folgt aus Lemma 5.2. Für den ersten Term der rechten Seite von (5.30) nutzen wir (vgl. [CK1], Seite 52)

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \Big\rangle J_T(r,y) ds(y) \\
&\qquad = \Big\langle \nu(r,x), U_r(x_r^\tau) \Big\rangle + \Big\langle \nu(r,x), V_r(x_r^\tau) \Big\rangle,
\end{aligned}$$

für $x \in \partial D$ mit

$$\begin{aligned}
U_r(x) &:= -\int_{\partial D} (\mathrm{Grad}_y \Phi)(x, y_r) J_T(r,y) ds(y) \qquad (5.31) \\
&= 2 \int_{\partial D} H(r,y) \nu(r,y) \Phi(x, y_r) J_T(r,y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

und

$$V_r(x) = -\int_{\partial D} \nu(r,y) \frac{\partial \Phi(x, y_r)}{\partial \nu(r,y)} J_T(r,y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3. \qquad (5.32)$$

Dabei existiert das erste Integral in (5.31) im Sinne eines Cauchy Hauptwertes. Die Stetigkeit von

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big\{ \Big\langle \nu(r,x), U_r(x_r^\tau) \Big\rangle \Big\} (0,h)$$

für $\tau \to 0$ zeigt man analog zum Nachweis der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials, vgl. Beweisteil III. von Satz 5.1.

Zum Nachweis der Stetigkeit von

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big\{ \Big\langle \nu(r,x), V_r(x_r^\tau) \Big\rangle \Big\} (0,h)$$

für $\tau \to 0$ nutzen wir die Zerlegung

$$\begin{aligned} \Big\langle \nu(r,x), V_r(x) \Big\rangle &= \int_{\partial D} \Big(\Big\langle \nu(r,x), \nu(r,x) - \nu(r,y) \Big\rangle \Big) \frac{\partial \Phi(x,y_r)}{\partial \nu(r,y)} J_T(r,y) ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y_r)}{\partial \nu(r,y)} J_T(r,y) ds(y), \quad x \in I\!R^3. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Die Stetigkeit der Fréchet Ableitung des ersten Terms von (5.33) erhält man aus Lemma 5.2. Für den zweiten Term nutzen wir

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y_r)}{\partial \nu_r(y)} J_T(r,y) ds(y) = \begin{cases} 1 & x \notin \partial D_r \\ 1/2 & x \in \partial D_r \end{cases} .$$

Die Fréchet Ableitung verschwindet identisch, ist also stetig. Nun sammeln wir alle Terme und erhalten Gleichung (5.27).

IV. Nun zeigen wir

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ (S_2 S_0^2 \varphi)(x_r^\tau) \Big\} (0,h) - \Big(\frac{\partial (T S_0^2)}{\partial r} (0,h) \varphi \Big)(x) \right\} = 0. \tag{5.34}$$

Zunächst betrachten wir den ersten Term. Es gilt für $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ (S_2 S_0^2 \varphi)(x_r^\tau) \Big\} (0,h) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tau} \Big\{ (S_2 S_0^2 \varphi)(x_r^\tau) \Big\} (0,h) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad} v_r)(x_r^\tau) \Big\rangle (0,h) \end{aligned} \tag{5.35}$$

mit

$$v_r(x) := \int_{\partial D} \Big\langle \nu(r,y), (\mathrm{grad}_x \Phi)(x,y_r) \Big\rangle J_T(r,y) (S_0^2 \varphi)(y) ds(y), \quad x \in I\!R^3.$$

Im Beweis von Theorem 2.23 von [CK1] wird die Beziehung

$$(\mathrm{grad} v_r)(x_r^\tau) = \kappa^2 \int_{\partial D} \Phi(x_r^\tau, y_r)\nu(r,y)J_T(r,y)(S_0^2\varphi)(y)ds(y) \tag{5.36}$$
$$+ \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r) \times \Big(\nu(r,y) \times (\mathrm{Grad}_T(S_0^2\varphi))(y)\Big) J_T(r,y)ds(y)$$

für $\tau > 0$ abgeleitet. Für den zweiten Term von (5.34) erhalten wir mit Hilfe der Aussage desselben Theorems die Beziehung

$$(TS_0^2\varphi)(x) = 2\Big\langle \nu(r,x), \kappa^2 \int_{\partial D} \Phi(x_r, y_r)\nu(r,y)(S_0^2\varphi)(y)J_T(r,y)ds(y)\Big\rangle$$
$$-2\Big\langle \nu(r,x), \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r, y_r) \times$$
$$\Big(\nu(r,y) \times (\mathrm{Grad}_T(S_0^2\varphi))(y)\Big) J_T(y,r)ds(y)\Big\rangle, \quad x \in \partial D.$$

Wir setzen

$$w_r(x_r^\tau) := \begin{cases} 2\Big\langle \nu(r,x), (\mathrm{grad} v_r)(x_r^\tau)\Big\rangle & \tau_0 > \tau > 0 \\ (TS_0^2\varphi)(x) & \tau = 0 \end{cases}$$

und müssen die Stetigkeit von

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big\{w_r(x_r^\tau)\Big\}(0,h)$$

für $\tau \to 0$ nachweisen. Für das erste Integral von w_r gehen wir dabei wie beim Einfachschichtpotential vor. Für das zweite Integral nutzen wir die Beziehungen

$$-\Big\langle \nu(r,x), \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x \Phi\Big)(x_r^\tau, y_r) \times b(y)J_T(r,y)ds(y)\Big\rangle, \quad x \in \partial D$$

$$= \nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k} \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x \Phi(x_r^\tau, y_r)\Big)_j b_k(y)J_T(r,y)ds(y)$$
$$= \nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k} \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x \Phi(x_r^\tau, y_r)\Big)_j \Big[b_k(y) - b_k(x)\Big] J_T(r,y)ds(y)$$
$$+\nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k} b_k(x) \int_{\partial D} \Big(\mathrm{grad}_x \Phi(x_r^\tau, y_r)\Big)_j J_T(r,y)ds(y)$$

und

$$\nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k}b_k(x)\int_{\partial D}\Big(\mathrm{grad}_x\Phi(x_r^\tau,y_r)\Big)_j J_T(x,y)ds(x)$$

$$= \nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k}b_k(x)\int_{\partial D}\Big\{2H(r,y)\nu_j(r,y)\Phi(x_r^\tau,y_r)$$

$$-\nu_j(r,y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(x_r^\tau,y_r)\Big\}J_T(r,y)ds(y),$$

sowie

$$\nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k}b_k(x)\int_{\partial D}\nu_j(r,y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(x_r^\tau,y_r)J(r,y)ds(y)$$

$$= \nu_i(r,x)\epsilon_{i,j,k}b_k(x)\int_{\partial D}(\nu_j(r,y)-\nu_j(r,x))\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(x_r^\tau,y_r)J(r,y)ds(y)$$

$$+\nu_i(r,x)\nu_j(r,x)\epsilon_{i,j,k}b_k(x)\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(y)}(x_r^\tau,y_r)J(r,y)ds(y),$$

die Antisymmetrie von $\epsilon_{i,j,k}$ und verfahren analog zu Teil III.

□

Bemerkung: Wie schon für das Streuproblem am schallweichen Hindernis erhält man die Randwerte der Fréchet Ableitung des gestreuten Feldes aus heuristischen Überlegungen. Hier taucht zusätzlich zu den Ableitungen des einfallenden und gestreuten Feldes die Fréchet Ableitung der Normalen auf.

□

5.3 Das elektromagnetische Streuproblem am perfekten Leiter

Auch für das elektromagnetische Streuproblem am perfekten Leiter ist eine Charakterisierung der Fréchet Ableitung des gestreuten Feldes durch ein Randwertproblem möglich.

Satz 5.4 *Sei ∂D ein Gebiet mit $C^{2,\alpha}-$glattem Rand. Die Fréchet Ableitung $\frac{\partial E^s}{\partial r}$ der Streuabbildung zum elektromagnetischen Streuproblem am Hindernis D an der Stelle $r = 0$ und mit dem Argument $h \in C^{2,\alpha}(\partial D, I\!R^3)$ wird durch die Lösung des äußeren Maxwellproblems zum Gebiet ∂D mit den Randwerten*

$$\begin{aligned} &\nu(x) \times \frac{\partial E^s}{\partial r}(h, x) \\ &= -P_2\Big(\frac{\partial \nu}{\partial r}(x, h) \times E(x)\Big) - \nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j}(x) h_j(x)\Big), \ x \in \partial D \end{aligned} \tag{5.37}$$

gegeben, wobei E die Lösung des ursprünglichen elektromagnetischen Streuproblems zum Gebiet D darstellt und P_2 hier gleich der Projektion in die Tangentialebene von ∂D ist.

Beweis: Wir werden zeigen, daß die durch Satz 4.20, Gleichung (4.15) gegebene Funktion eine Lösung des äußeren Maxwellproblems mit den angegebenen Maxwell-Randdaten ist. $\frac{\partial E}{\partial r}$ löst die Maxwell Gleichungen in $I\!R^3 \setminus \overline{D_r}$ und erfüllt die Silver Müller Ausstrahlungsbedingungen. Davon überzeugt man sich anhand der in (4.15) auftretenden Potentiale. Es bleiben die Randwerte zu berechnen.

Vorbemerkung: Wie schon bei den akustischen Problemen werden wir auch bei den Maxwellgleichungen die Randwerte berechnen, indem geeignete Terme addiert und wieder subtrahiert werden. Sie ergeben sich auf eine zu den Beweisen der Theoreme 5.1 und 5.3 analoge Weise, so daß auch hier die Vorbemerkung zu Theorem 5.1 gültig bleibt. Diesmal nimmt $\nu \times E_3$ die Rolle des Operators S_3 ein. Wir nutzen wie in den vorausgehenden Sätzen die Bezeichnungen

$$x_r^\tau := x + r(x) + \nu(r, x) \cdot \tau, \qquad x^\tau := x_0^\tau.$$

□

I. Wir berechnen die Randwerte $\nu \times E_3$ des letzten Termes von (4.15) an der Stelle $r = 0$. Mit

$$\lim_{\tau \to 0} \nu(x) \times \Big([E_3 P_2]\ [P_0(I + M + i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} P_2] b\Big)(x^\tau) = (P_2 b)(x), \quad x \in \partial D \tag{5.38}$$

und $P_2 P_0 = P_2$ erhalten wir

$$\lim_{\tau \to 0} \nu(x) \times \Big(- [E_3 P_2]\ [P_0(I + M + i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} P_2] \frac{\partial [P_0 R_3]}{\partial r}(0, h)\ E^i\Big)(x^\tau)$$

$$= -P_2 \left[\frac{\partial \nu}{\partial r}(h,x) \times E^i(x) + \nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E^i}{\partial x_j} h_j(x) \Big) \right], \quad x \in \partial D \tag{5.39}$$
$$= -P_2 \Big(\frac{\partial \nu}{\partial r}(x,h) \times E^i(x) \Big) - \nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E^i}{\partial x_j}(x) h_j(x) \Big), \; x \in \partial D.$$

II. Nun wollen wir zeigen, daß für die beiden ersten Terme von Gleichung (4.15) die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{\tau\to 0} \quad & \Big\{ \nu(x) \times \Big(-2 \frac{\partial [E_3 P_2]}{\partial r} [P_0(I+M+i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} P_2] \, [P_0 R_3] E^i \Big)(x^\tau) \\ & + \nu(x) \times \Big(\, 2[E_3 P_2] \, [P_0(I+M+i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} P_2] \\ & \cdot \frac{\partial P_0 [M + i\eta N P_1 S_0^2] P_2}{\partial r} \, [P_0(I+M+i\eta N P_1 S_0^2)^{-1} P_2] \, [P_0 R_3] E^i \Big)(x^\tau) \Big\} \\ = \quad & -P_2 \Big(\frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x) \times E^s(x) \Big) - \nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E^s}{\partial x_j}(x) \cdot h_j(x) \Big), \quad x \in \partial D \end{aligned} \tag{5.40}$$

gilt. Wie in der Vorbemerkung angekündigt berechnen mit Hilfe der Kettenregel, Einschub von P_2 und Umstellen für $\tau > 0$

$$\begin{aligned} & \nu(x) \times \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ E_3 P_2 b \Big\}(0,h,x_r^\tau) = P_2 \, \nu(x) \times \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ E_3 P_2 b \Big\}(0,h,x_r^\tau) \\ & = P_2 \, \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ \nu(r,x) \times [E_3 P_2 b](x_r^\tau) \Big\}(0,h) - P_2 \, \Big(\frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x) \times [E_3 P_2 b](x^\tau) \Big) \\ & \quad -P_2 \, \Big(\nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial [E_3 P_2 b]}{\partial x_j}(x^\tau) h_j(x) \Big) \Big) \\ & \quad -P_2 \, \Big(\nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial [E_3 P_2 b]}{\partial x_j}(x^\tau) \, \frac{\partial \nu_j}{\partial r}(r,h,x) \, \tau \Big) \Big) \end{aligned} \tag{5.41}$$

für alle Vektorfelder $b \in C(\partial D)$. Wir setzen nun

$$b \;=\; -2 P_0 (I + M + i\eta N S_0^2)^{-1} R_3 E^i, \tag{5.42}$$

nutzen $E^s = -2E_3(I + M + i\eta N S_0^2)^{-1} R_3 E^i$ und erhalten für den ersten Term von (5.40)

$$\begin{aligned}
&\nu(x) \times \frac{\partial}{\partial r}\Big\{ -2\, E_3 P_2 b\Big\}(0,h,x^\tau) &(5.43)\\
&= P_2 \frac{\partial}{\partial r}\Big\{\nu(r,x) \times [-2\, E_3 P_2 b](x_r^\tau)\Big\}(0,h) - P_2\Big(\frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x) \;\times\; E^s(x^\tau)\Big)\\
&- \nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E^s}{\partial x_j}(x^\tau)\; h_j(x)\Big) - \;\nu(x) \times \Big(\sum_j \frac{\partial E^s}{\partial x_j}(x^\tau)\; \frac{\partial \nu}{\partial r}(0,h,x) \cdot \tau\Big).
\end{aligned}$$

Es ist nach Satz 4.21 die Lösung des Maxwell Streuproblems in $C^{1,\alpha}(I\!R^3 \setminus D)$. Somit verschwindet der Grenzwert für $\tau \to 0$ des letzten Terms von (5.43). Um Gleichung (5.40) nachzuweisen, ist jetzt wegen (5.43) nur noch die Beziehung

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} P_2 \Big\{ &- 2 \frac{\partial}{\partial r}\Big\{\nu(r,x) \times [E_3 P_2 b](x_r^\tau)\Big\}(0,h) &(5.44)\\
&+ \Big(\frac{\partial [M P_2 + i\eta N P_1 S_0^2 P_2]}{\partial r}(0,h) b\Big)(x_r)\Big\} = 0
\end{aligned}$$

zu zeigen. Wir betrachten die Anteile E_1 und $i\eta E_2$ des Potentials E_3 nacheinander.

III. Zunächst zeigen wir

$$\lim_{\tau \to 0} P_2 \Big\{ 2\, \frac{\partial}{\partial r}\Big\{\nu(r,x) \times [E_1 P_2 b](x_r^\tau)\Big\}(0,h) - \Big(\frac{\partial [M P_2]}{\partial r}(0,h) b\Big)(x)\Big\} = 0. \qquad (5.45)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
z(r,\tau,x) \;:=\; 2 \int_{\partial D} \Bigg\{ &\Big(\mathrm{grad}_x \Phi\Big)(x_r^\tau, y_r)\Big\langle \nu(r,x) - \nu(r,y), b(y)\Big\rangle\\
&- \Big(\mathrm{grad}_x \Phi\Big)(x_r^\tau, y_r)\Big\langle \nu(r,x) - \nu(r,y), \nu(y)\Big\rangle \frac{\langle \nu(r,y), b(y)\rangle}{\langle \nu(y), \nu(r,y)\rangle}\\
&- b(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(r,x)}(x_r^\tau, y_r) &(5.46)\\
&+ \nu(y) \frac{\langle \nu(r,y), b(y)\rangle}{\langle \nu(y), \nu(r,y)\rangle} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(r,y)}(x_r^\tau, y_r)\Bigg\} J_T(r,y)\, ds(y), \quad x \in I\!R^3,
\end{aligned}$$

erhalten

$$2\nu(r,x) \times [E_1 P_2 b](x_r^\tau) = z(r,\tau,x),\; x \in \partial D, \qquad (5.47)$$

für $\tau > 0$ und für $\tau = 0$ die Beziehung (vgl. im Abschnitt 3.1 'Weitere Hilfsoperatoren' die Zerlegung des Operators $\hat{M}$)

$$[MP_2b](x) = z(r,0,x),\ x \in \partial D. \tag{5.48}$$

Es ist die Stetigkeit von $P_2\frac{\partial}{\partial r}\{z(r,\tau,x)\}(0,h)$ für $\tau \to 0$ nachzuweisen. Für alle Terme verfahren wir analog zu den Beweisteilen III. und IV. des Satzes 5.3. Für die ersten beiden Terme kommt man wieder mit Hilfe von $\operatorname{grad}_x\Phi = -\operatorname{grad}_y\Phi = -\operatorname{Grad}_y\Phi - \nu\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi$ und Lemma 5.2 zum Ziel. Hier kann auch Lemma 2.10 aus [CK1] angewandt werden. Für den letzten Term gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned}
&2\int_{\partial D}\nu(y)\frac{\langle\nu(r,y),b(y)\rangle}{\langle\nu(y),\nu(r,y)\rangle}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)J_T(r,y)ds(y)\\
&= 2\nu(x)\frac{\langle\nu(r,x),b(x)\rangle}{\langle\nu(x),\nu(r,x)\rangle}\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)J_T(r,y)ds(y)\\
&\quad+2\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)\Big\{\nu(r,y)\frac{\langle\nu(r,y),b(y)\rangle}{\langle\nu(y),\nu(r,y)\rangle}\\
&\qquad\qquad-\nu(r,x)\frac{\langle\nu(r,x),b(x)\rangle}{\langle\nu(x),\nu(r,x)\rangle}\Big\}J_T(r,y)ds(y).
\end{aligned}\tag{5.49}$$

Die Stetigkeit der Fréchet Ableitung des letzten Terms von (5.49) ist eine Konsequenz von Lemma 5.2. Es gilt $P_2(\nu\cdot\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in I\!R$. Nutzen wir die Fréchet Differenzierbarkeit des ersten Terms von (5.49), so folgt

$$\begin{aligned}
&P_2\frac{\partial}{\partial r}\left\{2\nu(x)\frac{\langle\nu_r(r,x),b(x)\rangle}{\langle\nu(x),\nu(r,x)\rangle}\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)J_T(r,y)ds(y)\right\}\\
&\quad= P_2\Big(\nu(x)\frac{\partial}{\partial r}\Big\{2\frac{\langle\nu(r,x),b(x)\rangle}{\langle\nu(x),\nu(r,x)\rangle}\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)J_T(r,y)ds(y)\Big\}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Wir sammeln alle Behauptungen und erhalten (5.45).

IV. Nun zeigen wir

$$\lim_{\tau\to 0}P_2\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big\{2\nu(r,x)\times\Big[E_2P_1S_0^2P_2b\Big](x_r^\tau)\Big\}(0,h) - \frac{\partial[NP_1S_0^2P_2]}{\partial r}(0,h)b\Big) = 0. \tag{5.50}$$

Wir setzen

$$v_1(r,\tau,x) := 2\kappa^2\nu(r,x) \times \int_{\partial D} \Big(P_1 S_0^2 P_2 b\Big)(y)\Phi(x_r^\tau, y_r)J_T(r,y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

und

$$v_2(r,\tau,x) := 2\nu(r,x) \times \int_{\partial D} \mathrm{Div}\Big(\nu(r) \times P_1 S_0^2 P_2 b)\Big)(y) \\ \Big(\mathrm{grad}_x \Phi\Big)(x_r^\tau, y_r)J_T(y,r)ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Mit Hilfe von (6.40) und Theorem 3.3 von [CK2] erhalten wir

$$\nu(r,x) \times \Big(E_2 P_1 S_0^2 P_2 b\Big)(x_r^\tau) = v_1(r,\tau,x) + v_2(r,\tau,x), \quad x \in \partial D \tag{5.51}$$

für $\tau > 0$ und

$$\Big(NP_1 S_0^2 P_2 b\Big)(r,x) = v_1(r,0,x) + v_2(r,0,x), \quad x \in \partial D. \tag{5.52}$$

Es bleibt die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{v_1(r,\tau,x) + v_2(r,\tau,x)\right\}(0,h)$ für $\tau \to 0$ nachzuweisen. Die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{v_1(r,\tau,x)\right\}(0,h)$ wird in Teil III. von Satz 5.1 gezeigt. Wir zerlegen noch einmal $v_2 = v_3 + v_4$ mit

$$v_3(r,\tau,x) := 2\mathrm{Div}\Big(\nu(r) \times (P_1 S_0^2 P_2 b)\Big)(x) \;\; \nu(r,x) \;\; \times \\ \int_{\partial D} (\mathrm{grad}_x \Phi)(x_r^\tau, y_r)J_T(r,y)ds(y)$$

und

$$v_4(r,\tau,x) := 2\nu(r,x) \times \int_{\partial D} \Big\{\mathrm{Div}\Big(\nu(r) \times (P_1 S_0^2 P_2 b)\Big)(y) \\ - \mathrm{Div}\Big(\nu(r) \times (P_1 S_0^2 P_2 b)\Big)(x)\Big\} \Big(\mathrm{grad}_x \Phi\Big)(x_r^\tau, y_r)J_T(r,y)ds(y).$$

Die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{v_4(r,\tau,x)\right\}(r,h)$ für $\tau \to 0$ erhält man entweder durch eine Anwendung von Lemma 2.10 aus [CK1] oder wie die Stetigkeit der ersten beiden Terme des Ausdrucks $z(r,\tau,x)$ aus Teil III. Es gilt

$$v_3(r,\tau,x) = 2\mathrm{Div}\Big(\nu(r) \times (P_1 S_0^2 P_2 b)\Big)(x) \\ \Big\{\nu(r,x) \times U_r(x_r^\tau) + \nu(r,x) \times V_r(x_r^\tau), \Big\}, \tag{5.53}$$

wobei U_r and V_r definiert sind wie in Teil III. von Satz 5.3. Die Stetigkeit von

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\nu(r,x)\times U_r(x_r^\tau)\Big\}(0,h)$$

für $\tau \to 0$ wird in Teil III. von Satz 5.1 gezeigt. Wir nutzen

$$\nu(r,x)\times V_r(x_r^\tau) = \int_{\partial D}\nu(r,x)\times\Big(\nu(r,x)-\nu(r,y)\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu(r,y)}(x_r^\tau,y_r)J_T(r,y)ds(y)$$

und Lemma 5.2, um die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu(r,x)\times V_r(x_r^\tau)\right\}(0,h)$ für $\tau \to 0$ abzuleiten. Sammeln wir nun alle Terme, so erhalten wir (5.50) und der Beweis des Satzes ist vollständig. □

Bemerkung: Auch für das elektromagnetische Streuproblem am idealen Leiter erhält man die Randwerte der Fréchet Ableitung des gestreuten Feldes aus heuristischen Überlegungen analog zu den akustischen Streuproblemen am schallweichen und schallharten Hindernis. □

Literaturverzeichnis

[Be] Berger, M.S.: “Nonlinearity and Functional Analysis.” Academic Press, New York 1977

[CK1] Colton, D. und Kreß, R.: “Integral equation methods in scattering theorie.” John Wiley and Sons, New York 1983

[CK2] Colton, D. und Kreß, R.: “Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering.” Springer Verlag 1992

[F3] Forster, O.: “Analysis 3” Vieweg, Braunschweig 1984

[Fr] Fredholm, I.: “Sur une classe d’équations fonctionelles.” Acta Math. **27**, 365-390 (1903)

[Gü] Günter, N. M.: “Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik.” Teubner Verlag, Leipzig 1957

[GT] Gilbarg, D. und Trudinger, N.S.: “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.” Springer Verlag 1977

[Ha] Hadamard, J.: “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations.” Yale University Press, New Haven 1923

[Ke] Kellogg, O. D.: “Foundations of Potential Theory.” Springer Verlag, Berlin 1967

[Ki1] Kirsch, A.: “Generalized boundary value- and control problems for the Helmholtz equation.”’ Habilitation thesis, Göttingen, 1984

[Ki2] Kirsch, A.: “Surface Gradients and Continuity Properties for Some Integral Opertors in Classical Scattering Theory.” Math. Meth. Appl.Sciences, Vol. 11, 789-804 (1989)

[Ki3] Kirsch, A.: “The domain derivative and two applications in inverse scattering theory.” Inverse Problems 9 (1993) 81-96

[K1] Kreß, R.: “Linear Integral Equations.” Springer Verlag, New York 1989

[K2] Kreß, R.: “Inverse Scattering from an open arc.” Math. Meth. App. Sci. Vol.17 (1994) (to appear)

[KR] Kreß, R. and Rundell, W.: “A Quasi-Newton Method in Inverse Obstacle Scattering” (to appear)

[Ku1] Kupradse, W. D.: "Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen." D.Verl. d. W. 1956

[Ku2] Kupradse, W. D., Gegelia, T.G., Basheleishvili, M. O. and Burchuladze, T.U.: "Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity." North Holland, Amsterdam, 1979

[Le] Leis, R.: "Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung." Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967

[LM] Lions, J. and Magenes, E.: "Problémes aux Limites non Homogénes et Applications." Vol. 1, Dunod, Paris, 1968

[Ma] Martensen, E.: "Potentialtheorie." Teubner, Stuttgart, 1968

[MP] Mikhlin S.G. and Prössdorf, S.: "Singular Integral Operators." Akademie Verlag Berlin, 1980

[Mü] Müller, C.: "Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen." Springer Verlag, Berlin, 1957

[Mu] Murch, R.D., Tan, D.G.H. and Wall, D.J.N.: "Newton-Kantorovich method applied to two-dimensional inverse scattering for an exterior Helmholtz problem." *Inverse Problems*, **4**, 1117-1128 (1988)

[Ne] Nĕcas, J.: "Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques." Masson, Paris, 1967

[P] Pironneau, O.: "Optimal Shape Design for Elliptic Systems." Springer, Berlin 1984

[Po] Potthast, R.: "Fréchet differentiability of boundary integral operators and its application to an inverse acoustic scattering problem." Inverse Problems 10 (1994), 431-447

[R] Roger, A.: "Newton Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem." IEEE Trans. Antenn. Propag. AP-29 232-8 1981

[Ri] Riesz, F.: "Über lineare Funktionalgleichungen." Acta Math. **41**, 71-98 (1918)

[S] Simon, J.: "Differentiation with respect to the domain in boundary value problems." Num.Func.Anal.Opt. No.2, 1980

[To] Tobocman, W.: "Inverse acoustic wave scattering in two dimensions for impenetrable targets." *Inverse Problems*, **5**, 1131-1144 (1989)

[WC] Wang, S.L. und Chen, Y.M.: "An efficient numerical method for exterior and interior inverse problems of Helmholtz equation." *Wave Motion*, **13**, 387-399 (1991)

[Wd] Wendland, W.L.: "Boundary Element Methods and Their Asymptotic Convergence." CISM courses 277, Springer-Verlag, Wien, New York, 1983

[Wr1] Werner, P.: "Beugungsprobleme der mathematischen Akustik." Arch. Rat. Mech. Anal., **12**, 155-184 (1963)

[Wr2] Werner, P.: " Randwertprobleme für die zeitunabhängigen Maxwellschen Gleichungen mit variablen Koeffizienten." Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, 167-195 (1965)

Lebenslauf

Mein Name ist Roland Wolfgang Erik Potthast. Ich wurde am 14.09.1967 als Sohn des Dipl. Rechtspflegers Wolfgang Potthast und der Bibliotheksangestellten Brigitte Potthast, geb. Kellerhof, in Soest/Westfalen geboren. Meine Einschulung erfolgte im September 1974 in die Wiese-Grundschule in Soest. Vom September 1978 bis Juni 1986 besuchte ich das Städtische Heinrich-Aldegrever Gymnasium in Soest, welches ich 1986 mit dem Abitur abschloß. Meinen Grundwehrdienst leistete ich im Anschluß an das Abitur vom 01. Juli 1986 bis zum 31. September 1987 beim Heeresfliegerregiment in Celle ab. Seit Oktober 1987 studiere ich an der Georg-August Universität Göttingen Physik und Mathematik. Im Oktober 1989 legte ich die Vordiplomprüfung im Fach Mathematik, im Februar 1990 die Vordiplomprüfung im Fach Physik ab. Meine Diplomprüfung im Fach Mathematik bestand ich im Februar 1993. Im Sommersemester 1993 legte ich einen weiteren Schwerpunkt durch den Beginn des Studium der Philosophie und Geschichte. Seit März 1993 arbeite ich am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik an meiner Promotion im Fach Mathematik.

Vom Oktober 1990 bis März 1993 arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Göttingen als Betreuer von Übungsgruppen in den Bereichen Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Funktionalanalysis, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Algebra, sowie mehrfach zur Betreuung des Mathematischen Propädeutikums.

Von April 1993 bis Ende Oktober 1993 war ich am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August Universität Göttingen als wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß angestellt und arbeitete auf dem Fachgebiet "Inverse Probleme". Seit November 1993 bin ich als wissenschaftlicher Angestellter am gleichen Institut beschäftigt.